



ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Ημερομηνία: 26/06/2025

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η λέξη: Α Σ Τ Ε Ρ Ο Μ Α Τ Α

- α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. (3 Μονάδες)
β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν από Τ και τελειώνουν σε Ρ. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Μετάθεση με επανάληψη (3Α και 2Τ).

$$M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{3! \cdot 2!} = 302400.$$

- β) Μετάθεση 8 γραμμάτων με επανάληψη (3Α).

$$M_8^{\varepsilon} = \frac{8!}{3!} = 6720.$$

2. Κώνος έχει διάμετρο βάσης 10 cm και ύψος 12 cm. Να υπολογίσετε:

- α) τον όγκο του, (2 Μονάδες)
β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας. (3 Μονάδες)

Λύση

- α) Αφού η διάμετρος της βάσης του κώνου είναι $\delta = 10$ cm, έπεται ότι η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι

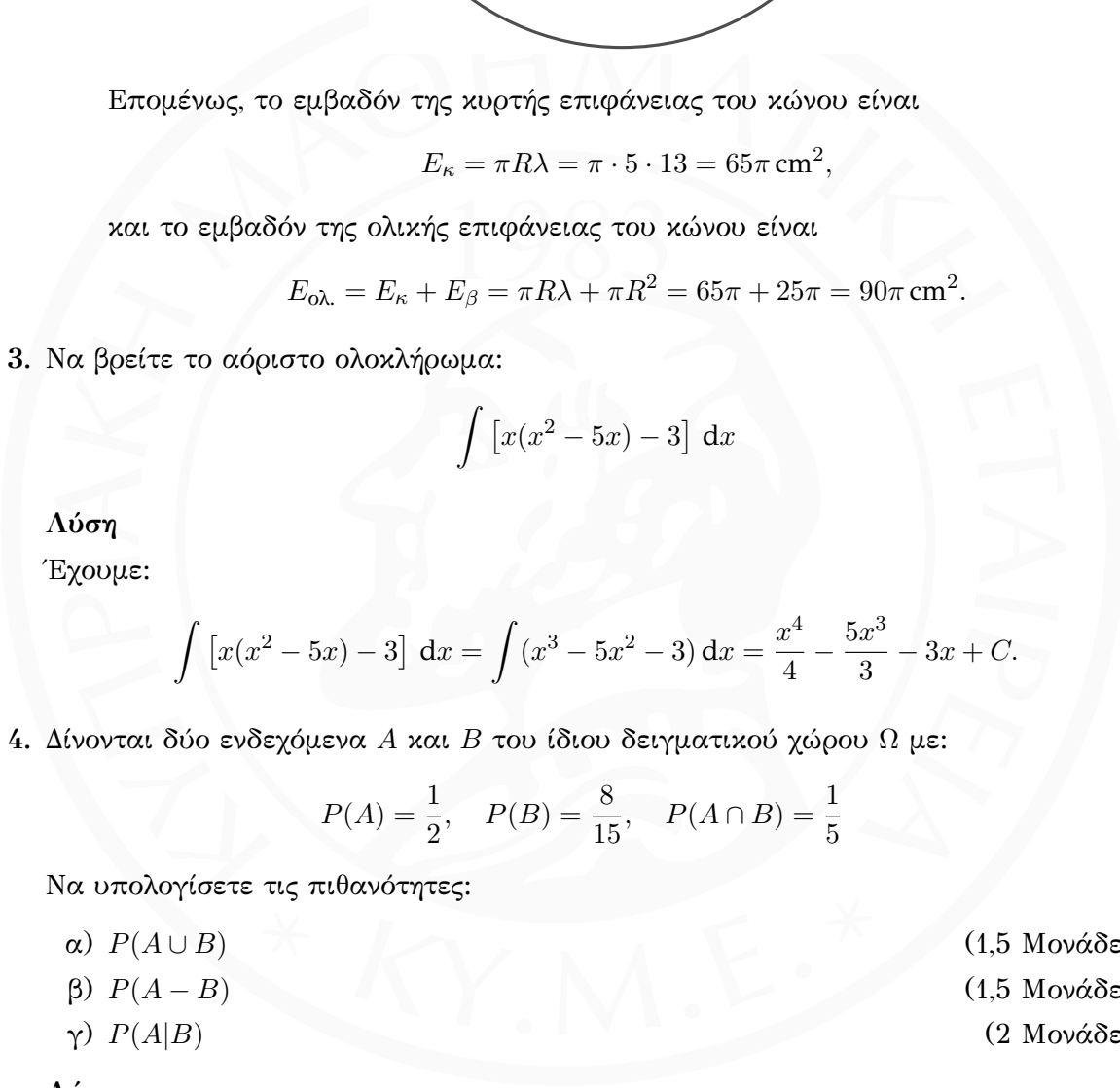
$$R = \frac{\delta}{2} = 5 \text{ cm},$$

και αφού είναι δεδομένο ότι το ύψος του κώνου είναι $v = 12$ cm, τότε ο όγκος του κώνου είναι

$$V = \frac{\pi R^2 v}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3.$$

- β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΚΒ (δείτε το σχήμα στην επόμενη σελίδα) εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, υπολογίζουμε την γενέτειρα λ του κώνου:

$$\lambda^2 = R^2 + v^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 \implies \lambda = 13 \text{ cm}.$$


$$E_{\kappa} = \pi R \lambda = \pi \cdot 5 \cdot 13 = 65\pi \text{ cm}^2,$$
$$E_{O\lambda.} = E_{\kappa} + E_{\beta} = \pi R\lambda + \pi R^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi \text{ cm}^2.$$
$$\int [x(x^2 - 5x) - 3] \, dx$$

Έχουμε:

$$\int [x(x^2 - 5x) - 3] \, dx = \int (x^3 - 5x^2 - 3) \, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} - 3x + C.$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{8}{15}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$\alpha) P(A \cup B)$ (1,5 Μονάδες)
 $\beta) P(A - B)$ (1,5 Μονάδες)
 $\gamma) P(A|B)$ (2 Μονάδες)

$$\alpha) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{8}{15} - \frac{1}{5} = \frac{15 + 16 - 6}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

$$\beta) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

$$\gamma) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{8}{15}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{8} = \frac{3}{8}.$$

$$f(x) = x^4 + 3\alpha^2 x^2 + 5, x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3\alpha^2 x^2 + 5$, $\alpha \in \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη ως πολυ-
νυμική με

$$f'(x) = 4x^3 + 6\alpha^2 x \quad \text{και} \quad f''(x) = 12x^2 + 6\alpha^2 \geq 0,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

6. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f''(x) = 12x^2 - 24x + 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(1, -7)$.

Λύση Ολοκληρώνουμε την $f''(x)$ για να βρούμε την $f'(x)$:

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int (12x^2 - 24x + 2) dx = 4x^3 - 12x^2 + 2x + C_1.$$

Ακολουθώντας ολοκληρώνουμε την $f'(x)$ για να βρούμε την $f(x)$:

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (4x^3 - 12x^2 + 2x + C_1) dx = x^4 - 4x^3 + x^2 + C_1x + C_2.$$

Άρα

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + C_1x + C_2.$$

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(1, -7)$, τότε:

$$f'(1) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = -7.$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + C_1 &\implies f'(1) = 4 - 12 + 2 + C_1 = -6 + C_1 \\ &\implies -6 + C_1 = 0 \implies C_1 = 6. \end{aligned}$$

Αφού λοιπόν $C_1 = 6$, έχουμε:

$$f(1) = 1 - 4 + 1 + 6 + C_2 = 4 + C_2 \implies 4 + C_2 = -7 \implies C_2 = -11,$$

και συνεπώς

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 11.$$

7. Το κεντρικό μαθητικό συμβούλιο ενός Λυκείου αποτελείται από τον πρόεδρο, τον αντιπρόεδρο, τον γραμματέα, τον ταμία και τρία μέλη. Από αυτούς πρόκειται να επιλεγούν τρία άτομα για να εκπροσωπήσουν το σχολείο σε ένα συνέδριο της Παγκύπριας Συντονιστικής Επιτροπής Μαθητών (Π.Σ.Ε.Μ.). Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή αυτή αν:

- α) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός, (1,5 Μονάδες)
- β) ο πρόεδρος πρέπει να συμπεριλαμβάνεται στην επιτροπή, (1,5 Μονάδες)
- γ) δεν μπορούν να συμπεριληφθούν ταυτόχρονα στην επιτροπή ο αντιπρόεδρος και ο γραμματέας. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Έχουμε να επιλέξουμε από επτά διαφορετικά άτομα τρία άτομα για να σχηματιστεί η τριμελής επιτροπή. Το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που μπορεί να γίνει η επιτροπή είναι:

$$C_3^7 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35.$$

- β) Αφού την μια θέση στην τριμελή επιτροπή καταλαμβάνει ο πρόεδρος, έχουμε να επιλέξουμε από τα υπόλοιπα έξι άτομα του κεντρικού μαθητικού συμβουλίου τα δύο και έχουμε:

$$C_2^6 = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

γ) Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Να είναι στην τριμελή επιτροπή ο αντιπρόεδρος αλλά όχι ο γραμματέας. Τότε, για τις άλλες δύο θέσεις έχουμε

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

- Να είναι στην τριμελή επιτροπή ο γραμματέας αλλά όχι ο αντιπρόεδρος. Τότε, για τις άλλες δύο θέσεις έχουμε

$$C_2^5 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

- Ούτε ο αντιπρόεδρος ούτε ο γραμματέας να είναι στην επιτροπή. Τότε, όλοι οι τρόποι είναι

$$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

Επομένως όλοι οι τρόποι συνολικά είναι:

$$10 + 10 + 10 = 30.$$

Εναλλακτική Λύση: Από τους 35 τρόπους χωρίς περιορισμό αφαιρούμε τους $C_1^5 = \binom{5}{1} = 5$ τρόπους όπου και ο αντιπρόεδρος και ο γραμματέας είναι στην επιτροπή. Άρα έχουμε $35 - 5 = 30$ τρόπους.

8. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) = (x + 2)(5 - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (3 Μονάδες)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(26)$ και $f(2025)$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Έχουμε $f'(x) = (x + 2)(5 - x)$, οπότε τα κρίσιμα σημεία είναι $x = -2$ και $x = 5$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' :

x	$-\infty$	-2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$ min $\nearrow$ max $\searrow$				

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -2]$, $[5, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-2, 5]$.

- β) Από την προηγούμενη ανάλυση, η συνάρτηση f είναι φθίνουσα στο $(5, +\infty)$. Αφού $2025 > 26 > 5$, και επειδή η f φθίνει στο διάστημα αυτό, τότε $f(26) > f(2025)$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x(x - \alpha)^2, \quad x \in [-1, +\infty), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 1.$$

Η γραφική παράσταση της πιο πάνω συνάρτησης παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α . (2 Μονάδες)

β) Αν $\alpha = 3$, να βρείτε και να χαρακτηρίσετε τα ακρότατα (τοπικά και ολικά) της συνάρτησης f . (3 Μονάδες)

Λύση

α) Έχουμε

$$f(x) = x(x^2 - 2\alpha x + \alpha^2) = x^3 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x,$$

άρα $f'(x) = 3x^2 - 4\alpha x + \alpha^2$. Αφού η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική και έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$, θα πρέπει να ισχύει $f'(1) = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} f'(1) = 0 &\implies 3 - 4\alpha + \alpha^2 = 0 \\ &\implies (\alpha - 3)(\alpha - 1) = 0 \\ &\implies \alpha = 3 \text{ ή } \alpha = 1 \text{ (απορρίπτεται αφού } \alpha > 1). \end{aligned}$$

β) Αν $\alpha = 3$ τότε η f έχει τύπο $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ και η παράγωγός της είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Ισχύει ότι:

$$f'(x) = 0 \implies 3x^2 - 12x + 9 = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 3 \text{ ή } x = 1.$$

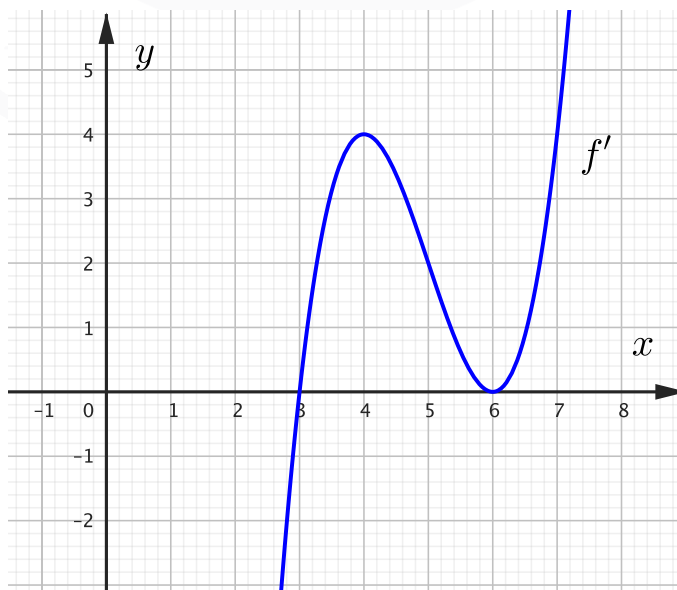
Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	</				

- Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 1$ το $f(1) = 4$.
- Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$ το $f(3) = 0$.
- Επειδή $f(-1) = -16 < 0 = f(3)$, η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστο το $x = -1$ το $f(-1) = -16$.
- Η συνάρτηση δεν έχει ολικό μέγιστο, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(3) = 0$.

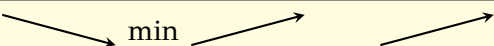
Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της συνάρτησης f .



- α) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . (2 Μονάδες)
- β) Να βρείτε για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο και να το χαρακτηρίσετε. (1 Μονάδα)
- γ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $A = f(5) \cdot f''(3)$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	3	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
f				

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 3]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

- β) Με βάση τον πίνακα μονοτονίας στο προηγούμενο ερώτημα η f έχει τοπικό ελάχιστο για $x = 3$. Δεν έχει κανένα άλλο τοπικό ακρότατο.
- γ) Αφού $f(3) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$, τότε $f(5) > 0$. Για το πρόσημο του $f''(3)$ κατασκευάζουμε τώρα τον πίνακα προσήμου της f'' , δηλαδή της παραγώγου της f' :

x	$-\infty$	4	6	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-	+

Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι $f''(3) > 0$. Άρα $A = f(5) \cdot f''(3) > 0$.

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. (2 Μονάδες)
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:
- τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, (3 Μονάδες)
 - την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, (2 Μονάδες)
 - τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. (1 Μονάδα)
- γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (2 Μονάδες)

Λύση

α) Η $f(x)$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Έχουμε

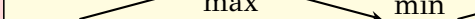
$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 = 2x^2(x - 3),$$

και άρα η συνάρτηση έχει ρίζες το 0 και το 3. Τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα $(0, 0)$ και $(3, 0)$.

β) i. Έχουμε

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x - 2).$$

Επομένως, η f' έχει ρίζες το 0 και το 2. Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f					

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$, και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.
- Για $x = 0$, η f έχει τοπικό μέγιστο την τιμή $f(0) = 0$, και για $x = 2$ η f έχει τοπικό ελάχιστο την τιμή $f(2) = 16 - 24 = -8$.

ii. Έχουμε

$$f''(x) = 12x - 12 = 12(x - 1).$$

Επομένως, η f'' έχει ρίζα το 1. Έχουμε $f(1) = -4$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα κυρτότητας:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f			

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα έχουμε:

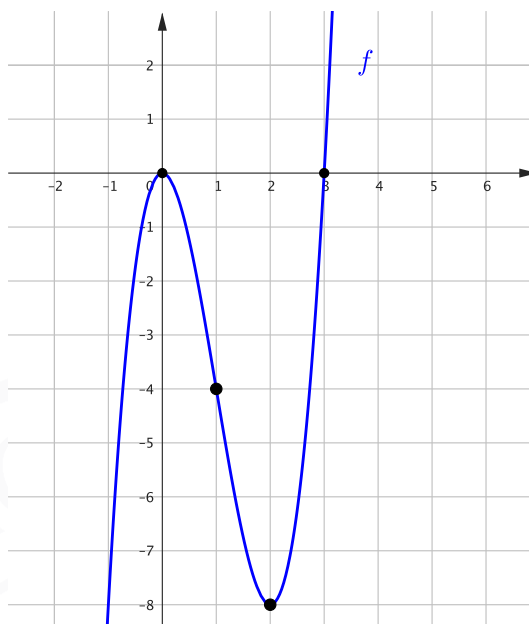
- Η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$ και κυρτή στο $[1, +\infty)$. Το $(1, -4)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

iii. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 6x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 6x^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty.$$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται πιο κάτω.



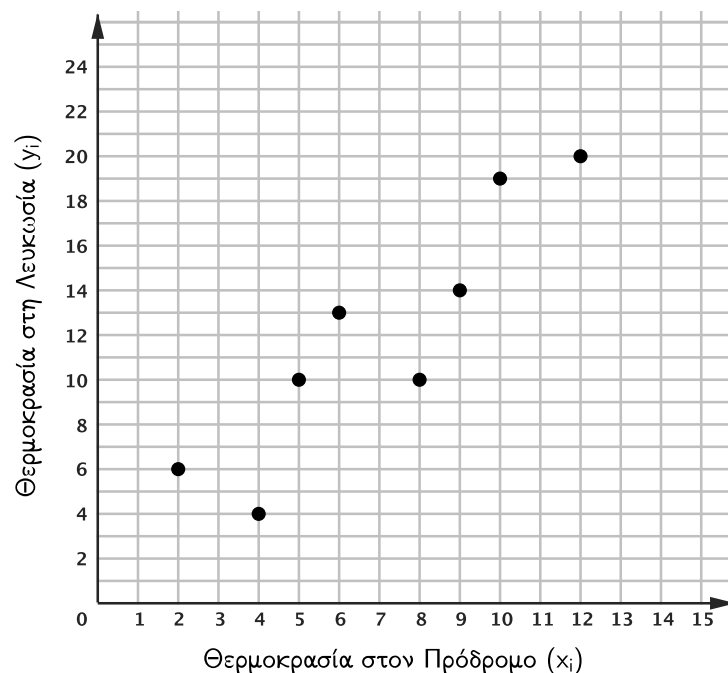
2. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μέγιστες ημερήσιες θερμοκρασίες, σε βαθμούς κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), που καταγράφηκαν για 8 μέρες τον Δεκέμβριο του 2024 στον Πρόδρομο και στη Λευκωσία.

Θερμοκρασία στον Πρόδρομο (x)	Θερμοκρασία στη Λευκωσία (y)
2	6
4	4
5	10
6	13
8	10
9	14
10	19
12	20

- α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 Μονάδες)
- β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (6 Μονάδες)
- γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. (1 Μονάδα)

Λύση

- α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται πιο κάτω:



β) Βρίσκουμε αρχικά ότι

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{\nu} = \frac{56}{8} = 7 \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{\nu} = \frac{96}{8} = 12.$$

Ακολούθως, κατασκευάζουμε τον πιο κάτω πίνακα:

x_i	y_i	$x_i y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
2	6	12	25	36
4	4	16	9	64
5	10	50	4	4
6	13	78	1	1
8	10	80	1	4
9	14	126	4	4
10	19	190	9	49
12	20	240	25	64
$\sum x_i = 56$	$\sum y_i = 96$	$\sum xy = 792$	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 78$	$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 226$

Έπειτα βρίσκουμε:

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{78}{8}} = \frac{\sqrt{39}}{2},$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{226}{8}} = \frac{\sqrt{113}}{2},$$

$$r = \frac{\sum x_i y_i - \nu \bar{x} \bar{y}}{\nu S_x S_y} = \frac{792 - 8 \cdot 7 \cdot 12}{8 \cdot \frac{\sqrt{39}}{2} \cdot \frac{\sqrt{113}}{2}} = 0,904.$$

γ) Υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ της Θερμοκρασίας στον Πρόδρομο και στη Λευκωσία, αφού ο συντελεστής συσχέτισης ($r = 0,904$) είναι μεγαλύτερος από 0,7. Αυτό ερμηνεύεται ως ακολούθως:

Όσο η θερμοκρασία στον Πρόδρομο αυξάνεται, αναμένεται να αυξάνεται η αντίστοιχη θερμοκρασία στη Λευκωσία.

3. Ο ρυθμός μεταβολής της αξίας ενός καινούργιου αυτοκινήτου δίνεται από τη συνάρτηση:

$$V'(t) = 300(t - 12), \quad 0 < t < 12$$

όπου t είναι η ηλικία του αυτοκινήτου σε χρόνια. Αν η αξία του αυτοκινήτου ένα χρόνο μετά την αγορά του είναι €46550, να βρείτε:

- α) τη συνάρτηση $V(t)$ της αξίας του αυτοκινήτου, (8 Μονάδες)
β) την αξία του αυτοκινήτου 5 χρόνια μετά την αγορά του. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση $V'(t)$ για να βρούμε τη $V(t)$:

$$V(t) = \int V'(t) dt = \int 300(t - 12) dt$$

Επομένως έχουμε

$$V(t) = 300 \int (t - 12) dt = 300 \left(\frac{t^2}{2} - 12t \right) + C = 150t^2 - 3600t + C.$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $V(1) = 46550$ για να προσδιορίσουμε τη σταθερά C :

$$46550 = 150(1)^2 - 3600(1) + C = 150 - 3600 + C = -3450 + C$$

και άρα

$$C = 46550 + 3450 = 50000$$

Επομένως η συνάρτηση $V(t)$ της αξίας του αυτοκινήτου δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = 150t^2 - 3600t + 50000.$$

- β) Υπολογίζουμε $V(5)$:

$$\begin{aligned} V(5) &= 150(5)^2 - 3600(5) + 50000 = 150 \cdot 25 - 18000 + 50000 \\ &= 3750 - 18000 + 50000 = 35750. \end{aligned}$$

Άρα η αξία του αυτοκινήτου 5 χρόνια μετά την αγορά του είναι:

$$V(5) = €35750.$$

4. Κατά τη θερινή περίοδο προσγειώνονται καθημερινά στα αεροδρόμια Λάρνακας και Πάφου αεροπλάνα σε ποσοστά 60% και 40%, αντίστοιχα. Το 10% των αεροπλάνων που προσγειώνονται στη Λάρνακα και το 4% των αεροπλάνων που προσγειώνονται στην Πάφο, κατά τη θερινή περίοδο, φτάνουν με καθυστέρηση. Αν μια μέρα της θερινής περιόδου επιλέξουμε τυχαία ένα αεροπλάνο που προσγειώθηκε σε ένα από τα πιο πάνω αεροδρόμια, να υπολογίσετε την πιθανότητα:

- α) το αεροπλάνο να έχει φτάσει με καθυστέρηση, (6 Μονάδες)
β) το αεροπλάνο να έχει προσγειωθεί στη Λάρνακα, αν γνωρίζουμε ότι έφτασε με καθυστέρηση. (4 Μονάδες)

Λύση

Ορίζουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

A : «το αεροπλάνο να προσγειωθεί στο αεροδρόμιο Λάρνακας»

P : «το αεροπλάνο να προσγειωθεί στο αεροδρόμιο Πάφου»

K : «το αεροπλάνο να προσγειωθεί στο αεροδρόμιο με καθυστέρηση»

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, έχουμε τις πιθανότητες

$$P(\Lambda) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \quad \text{και} \quad P(\Pi) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5},$$

καθώς και τις δεσμευμένες πιθανότητες

$$P(K|\Lambda) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \quad \text{και} \quad P(K|\Pi) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

Επομένως, έχουμε:

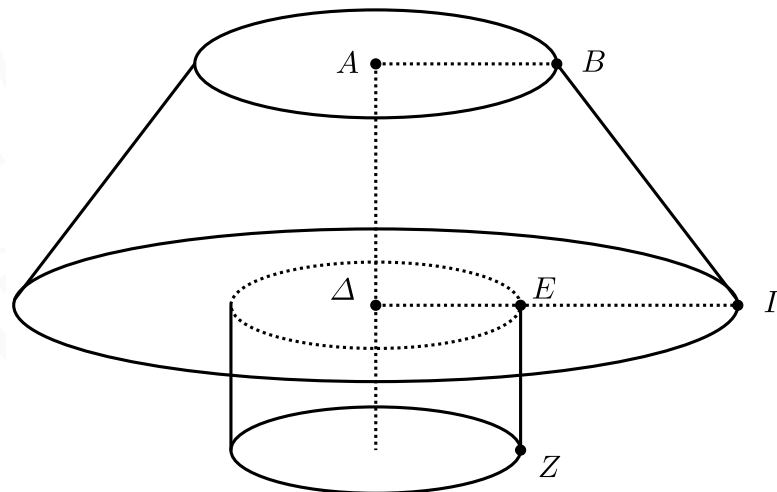
α) η πιθανότητα το αεροπλάνο να φτάσει με καθυστέρηση είναι:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(\Lambda \cap K) + P(\Pi \cap K) \\ &= P(\Lambda)P(K|\Lambda) + P(\Pi)P(K|\Pi) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{25} = \frac{19}{250}. \end{aligned}$$

β) η πιθανότητα το αεροπλάνο να έχει προσγειωθεί στη Λάρνακα με δεδομένο ότι έχει καθυστέρηση είναι:

$$P(\Lambda|K) = \frac{P(\Lambda \cap K)}{P(K)} = \frac{P(K|\Lambda)P(\Lambda)}{P(K)} = \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{10}}{\frac{19}{250}} = \frac{15}{19}.$$

5. Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κόλουρο κώνου. Το κέντρο της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου συμπίπτει με το κέντρο Δ της βάσης του κυλίνδρου. Η ακτίνα $(\Delta\Gamma)$ της μεγάλης βάσης του κόλουρου κώνου είναι διπλάσια από την ακτίνα (AB) της μικρής βάσης του. Ο όγκος του κόλουρου κώνου είναι $672\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του $A\Delta$ είναι ίσο με 8 cm . Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης $\Delta E = 5 \text{ cm}$ και ύψος $EZ = 4 \text{ cm}$.



- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού. (8 Μονάδες)
 β) Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πιο πάνω στερεού είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας, να υπολογίσετε τον όγκο της σφαίρας. (2 Μονάδες)

Λύση

- α) Μας έχουν δοθεί τα εξής στοιχεία:

Ακτίνα βάσης κυλίνδρου: $r = 5 \text{ cm}$.

Ύψος κυλίνδρου: $v = 4 \text{ cm}$

Ακτίνα μικρής βάσης κόλουρου κώνου: ρ (άγνωστο)

Ακτίνα μεγάλης βάσης κόλουρου κώνου: $R = 2\rho$

Ύψος κόλουρου κώνου: $v_1 = 8 \text{ cm}$

Γενέτειρα κόλουρου κώνου: λ

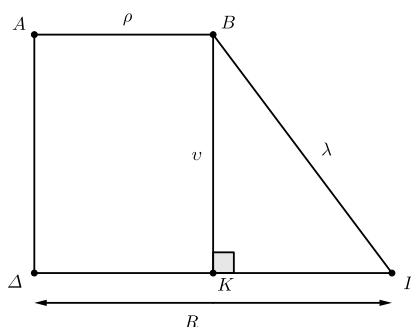
Έχουμε

$$V_{\text{κόλ. κών.}} = \frac{\pi v_1}{3}(\rho^2 + \rho \cdot R + R^2)$$
$$\Rightarrow 672\pi = \frac{\pi \cdot 8}{3}(\rho^2 + \rho \cdot 2\rho + (2\rho)^2) = \frac{\pi \cdot 8 \cdot 7\rho^2}{3} = \frac{56\pi\rho^2}{3}.$$

Άρα

$$\rho^2 = \frac{3 \cdot 672}{56} = 36 \Rightarrow \rho = 6 \text{ cm και } R = 2\rho = 12 \text{ cm}.$$

Φέρουμε κάθετη από το σημείο B στην $\Delta\Gamma$. Έστω ότι τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο K .



Έχουμε $K\Gamma = R - \rho = 6 \text{ cm}$, άρα από Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $BK\Gamma$ έχουμε:

$$\lambda^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow \lambda = 10 \text{ cm}.$$

Για να βρούμε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού υπολογίζουμε τα εξής:

$$E_{\text{μικρής βάσης κωλ. κων.}} = \pi\rho^2 = 36\pi$$

$$E_{\text{κυρτ. κολ. κων.}} = \pi(R + \rho)\lambda = \pi(12 + 6) \cdot 10 = 180\pi$$

$$E_{\text{κυρ. κυλ.}} = 2\pi r v = 2\pi \cdot 5 \cdot 4 = 40\pi$$

$$E_{\text{βάσης κυλ.}} + E_{\text{δακτυλίου}} = \text{μεγάλης βάσης κολ. κών.} = \pi R^2 = 144\pi$$

Άρα

$$E_{\text{ολ.}} = 36\pi + 180\pi + 40\pi + 144\pi = 400\pi \text{ cm}^2.$$

Σημείωση: Μπορούμε να υπολογίσουμε και ξεχωριστά το εμβαδόν της βάσης του κυλίνδρου που είναι ίσο με $\pi r^2 = 25\pi$ και το εμβαδόν του δακτυλίου που είναι ίσο με $\pi(R^2 - r^2) = \pi(12^2 - 5^2) = 119\pi$.

β) Γράφουμε R_1 για την ακτίνα της σφαίρας. Τότε

$$400\pi = 4\pi R_1^2 \Rightarrow R_1^2 = 100 \Rightarrow R_1 = 10.$$

Άρα

$$V_{\text{σφαίρας}} = \frac{4}{3}\pi R_1^3 = \frac{4\pi \cdot 10^3}{3} = \frac{4000\pi}{3} \text{ cm}^3.$$