



ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2025

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 16/06/2025

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνεται παραβολή με κορυφή το σημείο $O(0,0)$ και εστία το σημείο $E(2,0)$. Να βρείτε:

- (α) Την εξίσωση της παραβολής. (Μονάδες 2)
(β) Την εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής. (Μονάδα 1)
(γ) Τις παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής. (Μονάδες 2)

Λύση

- (α) Η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$ και εστία την $E(2,0)$ είναι η $y^2 = 8x$.
(β) Η διευθετούσα της παραβολής είναι η $x = -2$.
(γ) Οι $x = 2t^2$, $y = 4t$, $t \in \mathbb{R}$ είναι παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.

Σημείωση. Οι παραμετρικές εξισώσεις δεν είναι μοναδικές. Π.χ. οι $x = \frac{t^2}{8}$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$ είναι επίσης παραμετρικές εξισώσεις της παραβολής.

A2. Να βρείτε πραγματικούς αριθμούς α, β και γ , για τους οποίους να ισχύει:

$$\int (ae^x - \beta \eta \mu 2x + \gamma) dx = e^x + \sigma \upsilon \nu 2x - x + c.$$

(Μονάδες 5)

Λύση

Πρώτος τρόπος:

$$\int (ae^x - \beta \eta \mu 2x + \gamma) dx = ae^x + \frac{\beta \sigma \upsilon \nu 2x}{2} + \gamma x + c.$$

Άρα $a = 1$, $\frac{\beta}{2} = 1 \implies \beta = 2$ και $\gamma = -1$.

Δεύτερος τρόπος:

$$(e^x + \sigma \upsilon \nu 2x - x + c)' = ae^x - \beta \eta \mu 2x + \gamma = e^x - 2 \eta \mu 2x - 1.$$

Άρα $a = 1$, $\beta = 2$ και $\gamma = -1$

A3. (α) Να αποδείξετε ότι:

$$\sum_{k=1}^{\nu} (3k^2 - 3k + 1) = \nu^3.$$

(Μονάδες 3)

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{k=11}^{100} (3k^2 - 3k + 1).$$

(Μονάδες 2)

Λύση

Είναι γνωστά τα βασικά αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\nu} k^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Επομένως έχουμε:

(α) Το πρώτο μέρος της δεδομένης παράστασης χρησιμοποιώντας ιδιότητες των αθροισμάτων γράφεται

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (3k^2 - 3k + 1) &= 3 \sum_{k=1}^{\nu} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{\nu} k + \sum_{k=1}^{\nu} 1 \\ &= 3 \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6} - 3 \frac{\nu(\nu+1)}{2} + \nu \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις θα πάρουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (3k^2 - 3k + 1) &= \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{2} - \frac{3\nu(\nu+1)}{2} + \nu \\ &= \frac{\nu((2\nu^2 + 3\nu + 1) - 3(\nu+1) + 2)}{2} \\ &= \frac{\nu(2\nu^2 + 3\nu + 1 - 3\nu - 3 + 2)}{2} = \frac{2\nu^3}{2} = \nu^3. \end{aligned}$$

Δεύτερος Τρόπος: Παρατηρούμε ότι το $\alpha_k = 3k^2 - 3k + 1$ γράφεται ως

$$\alpha_k = k^3 - (k-1)^3.$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} (3k^2 - 3k + 1) &= \sum_{k=1}^{\nu} \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\nu} \\ &= (1^3 - 0^3) + (2^3 - 1^3) + \dots + (\nu^3 - (\nu-1)^3) = \nu^3. \end{aligned}$$

Τρίτος Τρόπος: Εναλλακτικά, εφόσον μας δίνεται το τελικό αποτέλεσμα, μπορεί

να χρησιμοποιηθεί και η μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής.

(β) Χρησιμοποιώντας το (α) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\kappa=11}^{100} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) &= \sum_{\kappa=1}^{100} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) - \sum_{\kappa=1}^{10} (3\kappa^2 - 3\kappa + 1) \\ &= 100^3 - 10^3 = 1000000 - 1000 = 999000.\end{aligned}$$

A4. Δίνονται τα ψηφία: 1, 1, 2, 3, 3, 4.

(α) Να υπολογίσετε το πλήθος των εξαψήφων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα πιο πάνω ψηφία. **(Μονάδες 2)**

(β) Πόσοι από αυτούς έχουν τα δύο τριάρια σε διαδοχικές θέσεις (παράδειγμα ενός τέτοιου αριθμού είναι: 133241); **(Μονάδες 2)**

(γ) Πόσοι από τους εξαψήφιους αριθμούς του υποερωτήματος (α) δεν περιέχουν τον αριθμό έντεκα; **(Μονάδα 1)**

Λύση

(α) $M_6^{\varepsilon} = \frac{6!}{2!2!} = 180$ εξαψήφιοι αριθμοί.

(β) Για να έχουν τα δύο τριάρια σε διαδοχικές θέσεις, θεωρούμε το «33» ως ένα ενιαίο ψηφίο. **Απάντηση:** $M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$ εξαψήφιοι αριθμοί.

(γ) **Πρώτος τρόπος:** Το πλήθος των εξαψήφων αριθμών που περιέχουν τον αριθμό 11 είναι $M_5^{\varepsilon} = \frac{5!}{2!} = 60$. Άρα, το πλήθος των αριθμών που δεν περιέχουν τον αριθμό 11 είναι $180 - 60 = 120$.

Δεύτερος τρόπος: Για να μην περιέχεται ο αριθμός 11 στον εξαψήφιο αριθμό, οι δύο άσσοι θα πρέπει να βρίσκονται στις κενές θέσεις:

_2_3_3_4_.

Αυτό μπορεί να συμβεί με $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$ τρόπους. Το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων των υπόλοιπων ψηφίων είναι $M_4^{\varepsilon} = \frac{4!}{2!} = 12$. Επομένως, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το πλήθος των εξαψήφων που δεν περιέχουν το 11 είναι ίσο με $10 \cdot 12 = 120$.

A5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^5 - 3x^3 + 4x + 7 = 0$, έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (λύση) στο $\mathbb{R}$. **(Μονάδες 5)**

Λύση

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^5 - 3x^3 + 4x + 7$ για $x \in \mathbb{R}$.

Υπαρξη τουλάχιστον μιας ρίζας

Πρώτος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^5 - 3x^3 + 4x + 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^5 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^5 - 3x^3 + 4x + 7) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^5 = -\infty\end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μία ρίζα. Επομένως και η δοθείσα εξίσωση έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{R}$.

Δεύτερος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$ με $f(0) = 7 > 0$ και $f(-2) = -41 < 0$. Τότε $f(0) \cdot f(-2) < 0$. Αφού ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano τότε υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 0)$.

Μοναδικότητα της ρίζας

Πρώτος Τρόπος

Έχουμε $f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 4$. Άρα

$$f'(x) = 0 \implies 10x^4 - 9x^2 + 4 = 0.$$

Η εξίσωση είναι διτετράγωνη με διακρίνουσα $\Delta = 81 - 160 = -79 < 0$. Άρα η παράγωγος δεν έχει πραγματικές λύσεις και συνεπώς διατηρεί το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$. Αφού $f'(0) = 4 > 0$, τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αφού η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μία ρίζα και είναι γνησίως αύξουσα τότε η ρίζα είναι μοναδική. Άρα και η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

Δεύτερος τρόπος

Αφού η συνάρτηση f έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-2, 0)$ υποθέτουμε ότι έχει δύο τυχαίες ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) ως πολυωνυμική με $f'(x) = 10x^4 - 9x^2 + 4$ και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Αφού ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$. Τότε $10\xi^4 - 9\xi^2 + 4 = 0$ που όπως είδαμε και στον πρώτο τρόπο είναι αδύνατο. Αυτό είναι άτοπο, άρα και η δοθείσα εξίσωση έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

- A6. (α) Έστω ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει ότι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[\alpha, \beta]$. (Μονάδες 3)

- (β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξημ}(\sin x) + x$ είναι σταθερή στο $[0, \pi]$. (Μονάδες 2)

Λύση

- (α) Επιλέγουμε δύο οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$. Παρατηρούμε ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή, η f συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) . Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ για το οποίο ισχύει:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Αφού ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε και για το $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ θα

έχουμε $f'(\xi) = 0$. Έτσι

$$0 = f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \implies f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_1) = f(x_2).$$

Άρα για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 < x_2$ αποδείξαμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$ και έτσι η συνάρτηση είναι σταθερή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- (β) Έστω τώρα $f(x) = \text{τοξημ}(\sin x) + x$, $x \in [0, \pi]$. Για να δείξουμε ότι είναι σταθερή αρκεί από το (α) να δείξουμε ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{-\eta\mu x}{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 x}} + 1 = -\frac{\eta\mu x}{\sqrt{\eta\mu^2 x}} + 1 = -\frac{\eta\mu x}{|\eta\mu x|} + 1 = -1 + 1 = 0.$$

αφού $|\eta\mu x| = \eta\mu x$ στο $[0, \pi]$. Αφού $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, \pi]$, η συνάρτηση f είναι σταθερή.

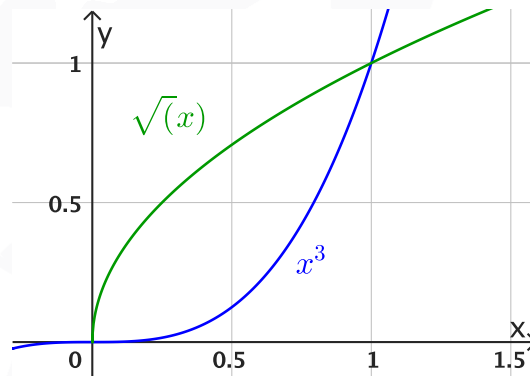
A7. Έστω T το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^3$ και $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

- (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου T . (Μονάδες 3)
(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου T γύρω από τον άξονα των τεταγμένων. (Μονάδες 2)

Λύση

- (α) Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και έχουμε:

$$x^3 = \sqrt{x} \implies x = 0 \text{ ή } x = 1.$$



Έτσι έχουμε

$$E = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{5}{12} \text{ τ.μ.}$$

- (β) Μετασχηματίζουμε τις 2 εξισώσεις ως προς x^2 και έχουμε:

$$y = \sqrt{x} \implies x^2 = y^4 \text{ και } y = x^3 \implies x^2 = y^{2/3}.$$

Επομένως, ο όγκος V είναι:

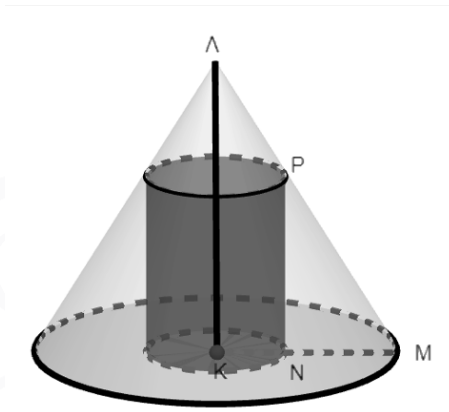
$$V = \pi \int_0^1 (y^{2/3} - y^4) dy = \pi \left[\frac{3}{5} y^{5/3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{5} \text{ κ.μ.}$$

- A8. Σε κώνο με ακτίνα 2m και ύψος 5m, εγγράφεται κύλινδρος. Να υπολογίσετε το ύψος και την ακτίνα του κυλίνδρου, ώστε ο όγκος του κυλίνδρου να είναι μέγιστος.

(Μονάδες 5)

Λύση

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $K\Lambda M$ και NPM όπως φαίνονται στο σχήμα.



Επειδή η γωνία M είναι κοινή και $\widehat{\Lambda K M} = \widehat{P N M} = 90^\circ$, τότε τα δύο τρίγωνα είναι όμοια.

Έστω $y = PN$ το ύψος του κυλίνδρου και $x = KN$ η ακτίνα της βάσης. ($0 < x < 2, 0 < y < 5$).

Από όμοια τρίγωνα έχουμε:

$$\frac{5}{y} = \frac{2}{2-x} \implies 2y = 5(2-x) \implies y = \frac{10-5x}{2}.$$

Τότε

$$V = \pi R^2 v = \pi x^2 y = \frac{\pi x^2 (10-5x)}{2} = \frac{5\pi(2x^2 - x^3)}{2}.$$

Για να βρούμε το τοπικό μέγιστο υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{5\pi(4x - 3x^2)}{2}.$$

Άρα στο τοπικό μέγιστο θα έχουμε

$$\frac{dV}{dx} = 0 \iff \frac{5\pi(4x - 3x^2)}{2} = 0 \iff x = 0 \text{ (απορρίπτεται)} \text{ ή } x = \frac{4}{3}.$$

Για να ελέγξουμε αν είναι τοπικό μέγιστο υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{5\pi(4 - 6x)}{2} = 5\pi(2 - 3x).$$

Για $x = \frac{4}{3}$ είναι

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 5\pi(2 - 4) = -10\pi < 0.$$

Άρα, για $x = \frac{4}{3}$ έχουμε τοπικό μέγιστο. (Αυτό είναι και ολικό μέγιστο διότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, 2]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και δεν έχει μέγιστο στα άκρα.)

Επομένως, όταν ο όγκος είναι μέγιστος, η ακτίνα του κυλίνδρου είναι $R = \frac{4}{3}$ m και το ύψος του $v = \frac{10-5 \cdot \frac{4}{3}}{2} = \frac{30-20}{6} = \frac{5}{3}$ m.

A9. Έστω ότι η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ είναι η $y = -x + \alpha + \beta$. **(Μονάδα 1)**

(β) Αν η f' είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι: $f(x) + x \geq \alpha + \beta, \forall x \in [\alpha, \beta]$. **(Μονάδες 4)**

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

(α) Η κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\beta, \alpha)$ είναι

$$\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha} = -1.$$

Η εξίσωση της ευθείας AB είναι:

$$y - y_A = \lambda_{AB} \cdot (x - x_A) \implies y - \beta = -1 \cdot (x - \alpha) \implies y = -x + \alpha + \beta.$$

(β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$. Η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$, αν και μόνο αν η f' είναι φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $[\alpha, \beta]$ τότε $y_{AB} \leq f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Άρα

$$-x + \alpha + \beta \leq f(x) \implies \alpha + \beta \leq f(x) + x, \forall x \in [\alpha, \beta]$$

A10. Δίνονται τέσσερα δοχεία, A, B, Γ και Δ, και εννέα διαφορετικά μολύβια.

(Δεν υπάρχει περιορισμός στη χωρητικότητα των δοχείων.)

(α) i) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά; **(Μονάδες 2)**

ii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου «το δοχείο A να περιέχει ακριβώς πέντε μολύβια». **(Μονάδα 1)**

(β) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν τα εννέα μολύβια στα δοχεία αυτά, ώστε κάθε δοχείο να περιέχει τουλάχιστον ένα μολύβι; **(Μονάδες 2)**

Λύση

(α) i) Το κάθε μολύβι έχει τέσσερις δυνατές επιλογές επομένως έχουμε

$$\delta_9^4 = 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4 = 4^9 = 262144$$

τρόπους.

ii) Η επιλογή των 5 μολυβιών για το δοχείο Α μπορεί να γίνει με $\binom{9}{5}$ τρόπους και για τα υπόλοιπα 4 μολύβια που θα μπουν στα 3 δοχεία υπάρχουν $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$ τρόποι.

Επομένως, οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι:

$$\binom{9}{5} \cdot 3^4 = \frac{9!}{5!(9-5)!} \cdot 3^4 = 10206.$$

Έτσι, η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P = \frac{\text{Αριθμός ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Όλες οι δυνατές περιπτώσεις}} = \frac{\binom{9}{5} \cdot 3^4}{4^9} = \frac{10206}{262144} \approx 0.0389.$$

(β) Οι τρόποι να είναι γεμάτα τα δοχεία με τουλάχιστον ένα μολύβι είναι να περιέχουν αντίστοιχα

- (1,1,1,6) μολύβια (με κάποια σειρά) με $\binom{9}{6} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \cdot \frac{4!}{3!} = 2016$ τρόπους
- (1,1,2,5) μολύβια (με κάποια σειρά) με $\binom{9}{5} \binom{4}{2} \binom{2}{1} \cdot \frac{4!}{2!} = 18144$ τρόπους
- (1,1,3,4) μολύβια (με κάποια σειρά) με $\binom{9}{4} \binom{5}{3} \binom{2}{1} \cdot \frac{4!}{2!} = 30240$ τρόπους
- (1,2,2,4) μολύβια (με κάποια σειρά) με $\binom{9}{4} \binom{5}{2} \binom{3}{2} \cdot \frac{4!}{2!} = 45360$ τρόπους
- (1,2,3,3) μολύβια (με κάποια σειρά) με $\binom{9}{3} \binom{6}{3} \binom{3}{2} \cdot \frac{4!}{2!} = 60480$ τρόπους
- (2,2,2,3) μολύβια (με κάποια σειρά) με $\binom{9}{3} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \cdot \frac{4!}{3!} = 30240$ τρόπους

Άρα συνολικά υπάρχουν 186480 τρόποι.

Εναλλακτική Λύση:

Υπάρχουν 4^9 τρόποι να τοποθετηθούν τα μολύβια αλλά σε κάποιους από αυτούς μπορεί κάποιο δοχείο να είναι άδειο.

- Το δοχείο Α (ομοίως για τα άλλα δοχεία) είναι άδειο με 3^9 τρόπους.
- Τα δοχεία Α, Β (ομοίως για τα άλλα ζεύγη δοχείων) είναι άδεια με 2^9 τρόπους.
- Τα δοχεία Α, Β, Γ (ομοίως για τις άλλες τριάδες δοχείων) είναι άδεια με 1^9 τρόπο.

Άρα από την Αρχή Εγκλεισμού-Αποκλεισμού υπάρχουν

$$4^9 - \binom{4}{1} \cdot 3^9 + \binom{4}{2} \cdot 2^9 - \binom{4}{3} \cdot 1^9 = 186480$$

τρόποι για να μην είναι κανένα δοχείο άδειο.

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}.$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα μονοτονίας της, τα τοπικά της ακρότατα, τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασής της και να την παραστήσετε γραφικά. **(Μονάδες 10)**

Λύση

Πεδίο Ορισμού: $A = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Σημεία τομής με άξονες:

- Αφού $0 \notin A$ τότε γραφική παράσταση δεν τέμνει την ευθεία $x = 0$ (δηλαδή τον άξονα των τεταγμένων).
- $y = 0 \iff f(x) = x - 2 + \frac{1}{x} \iff \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = 0 \iff \frac{(x-1)^2}{x} = 0 \iff x = 1$.

Άρα το μοναδικό σημείο τομής με τους άξονες είναι το $(1, 0)$.

Μονοτονία - Τοπικά Ακρότατα:

Για τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f εξετάζουμε το πρόσημο και τις ρίζες της f' .

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \iff \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} = 0 \iff x = \pm 1.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$			max		

Παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1, 0)$ και $(0, 1]$.
- Στο $x = -1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(-1) = -4$ και στο $x = 1$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(1) = 0$.

Κατακόρυφες Ασύμπτωτες:

Αφού το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{0\}$ ελέγχουμε για κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x = 0$. Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

χρησιμοποιώντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Επομένως η ευθεία $x = 0$ (άξονας των τεταγμένων) αποτελεί κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Οριζόντιες Ασύμπτωτες:

Παρατηρούμε ότι οριζόντιες ασύμπτωτες δεν υπάρχουν γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

χρησιμοποιώντας ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Πλάγιες Ασύμπτωτες:

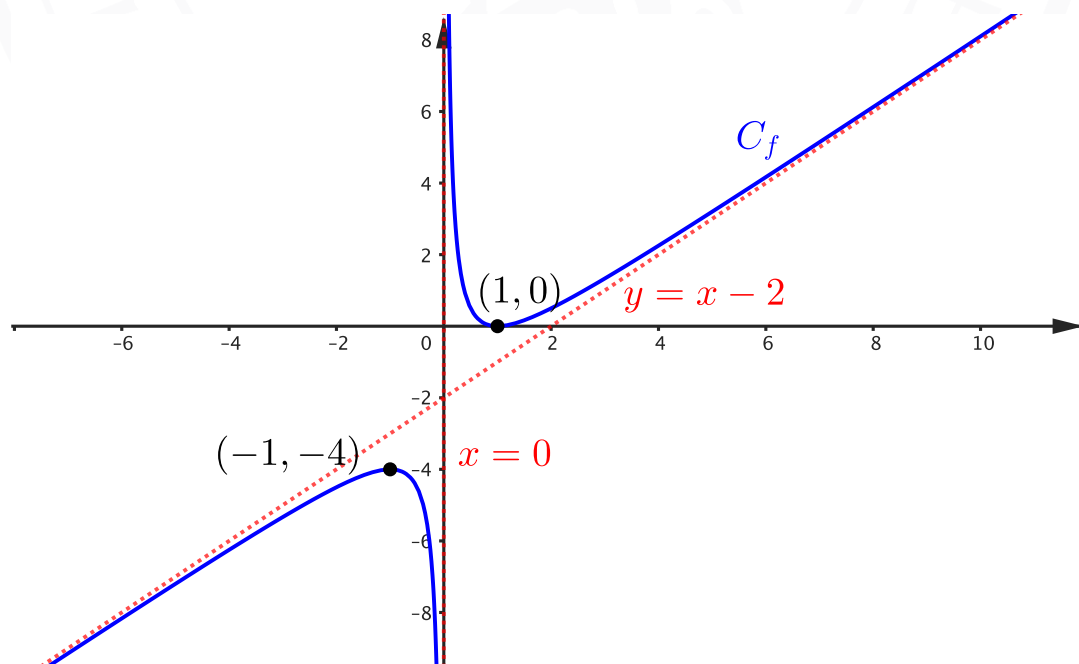
Επίσης, αφού $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$ και με βάση τα πιο πάνω όρια έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Και έτσι συμπεραίνουμε ότι η ευθεία $y = x - 2$ αποτελεί πλάγια ασυμπτωτης για την γραφική παράσταση της f , τόσο στην περιοχή του $-\infty$, όσο και στην περιοχή του $+\infty$.

Γραφική Παράσταση:

Με τις πιο πάνω πληροφορίες έχουμε την γραφική παράσταση της $f(x) = x - 2 + \frac{1}{x}$ όπως φαίνεται πιο κάτω:



B2. (α) Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -u$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx.$$

(Μονάδες 3)

(β) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0.$$

(Μονάδες 2)

(γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\eta \mu x}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\eta \mu x}}{1+e^{\eta \mu x}} dx = \pi.$$

(Μονάδες 5)

Λύση

(α) Έστω $x = -u$. Τότε $dx = -du$. Για $x = \alpha$ είναι $u = -\alpha$ και για $x = -\alpha$ είναι $u = \alpha$. Άρα

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = - \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u) du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-x) dx$$

(β) Έστω $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$, $x \in [-1, 1]$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$. Άρα, βάση του πρώτου ερωτήματος:

$$A = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = \int_{-1}^1 \frac{-x}{\sqrt{1+(-x)^4}} dx = - \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = B.$$

Τότε

$$2A = A + B = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx - \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0$$

άρα και

$$A = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^4}} dx = 0.$$

(γ) Έστω $g(x) = \frac{1}{1+e^{\eta \mu x}}$, $x \in [-\pi, \pi]$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$. Άρα, βάση του πρώτου ερωτήματος:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\eta \mu x}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\eta \mu(-x)}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{-\eta \mu x}} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{\eta \mu x}}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\eta \mu x}}{e^{\eta \mu x}+1} dx = \Delta. \end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned} 2\Gamma &= \Gamma + \Delta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1+e^{\eta \mu x}} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\eta \mu x}}{1+e^{\eta \mu x}} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+e^{\eta \mu x}}{1+e^{\eta \mu x}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi. \end{aligned}$$

Άρα

$$\Gamma = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 + e^{\eta u x}} dx = \pi.$$

B3. Τέσσερις αθλητές της καλαθοσφαίρισης, ο Ανδρέας, ο Βασίλης, ο Γιάννης και ο Δημήτρης, ρίχνουν με τη σειρά μια βολή στο ίδιο καλάθι με ποσοστό ευστοχίας, 5%, 15%, 30% και 40%, αντίστοιχα.

- (α) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι εύστοχες και οι τέσσερις βολές. (Μονάδες 2)
(β) Να βρείτε την πιθανότητα να είναι άστοχες και οι τέσσερις βολές. (Μονάδες 3)
(γ) Αν οι τρεις βολές από τις τέσσερις είναι εύστοχες, να βρείτε την πιθανότητα αυτές να είναι οι βολές του Ανδρέα, του Βασίλη και του Γιάννη. (Μονάδες 5)

Λύση

- (α) Έστω A, B, Γ και Δ τα ενδεχόμενα να ευστόχησαν ο Ανδρέας, ο Βασίλης, ο Γιάννης και ο Δημήτρης αντίστοιχα. Τα ενδεχόμενα A, B, Γ και Δ είναι ανεξάρτητα, άρα:

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta) \\ &= \frac{5}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{9}{10000} \end{aligned}$$

(β)

$$\begin{aligned} P(A' \cap B' \cap \Gamma' \cap \Delta') &= P(A') \cdot P(B') \cdot P(\Gamma') \cdot P(\Delta') \\ &= \frac{95}{100} \cdot \frac{85}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{6783}{20000} \end{aligned}$$

- (γ) Έστω E το ενδεχόμενο οι τρεις από τις τέσσερις βολές να είναι εύστοχες.

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta') + P(A \cap B \cap \Gamma' \cap \Delta) \\ &\quad + P(A \cap B' \cap \Gamma \cap \Delta) + P(A' \cap B \cap \Gamma \cap \Delta) \\ &= \frac{5}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{60}{100} + \frac{5}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{70}{100} \cdot \frac{40}{100} \\ &\quad + \frac{5}{100} \cdot \frac{85}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} + \frac{95}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{513}{20000}. \end{aligned}$$

Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

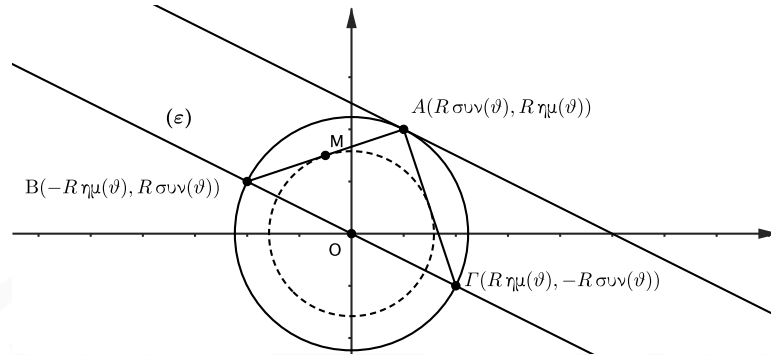
$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap \Gamma | E) &= \frac{P(A \cap B \cap \Gamma \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta')}{P(E)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma) \cdot P(\Delta')}{P(E)} = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{60}{100}}{\frac{513}{20000}} = \frac{1}{19}. \end{aligned}$$

B4. Δίνεται ο κύκλος (K) με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και $A(R \sin \vartheta, R \cos \vartheta)$, $\vartheta \in (0, \pi)$ τυχαίο σημείο του. Φέρουμε ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη με την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A .

- (α) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο στα σημεία $B(-R \cos \vartheta, R \sin \vartheta)$ και $\Gamma(R \cos \vartheta, -R \sin \vartheta)$. (Μονάδες 4)

- (β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της χορδής AB είναι κύκλος. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. (Μονάδες 6)

Λύση



- (α) Η κλίση της ευθείας OA είναι

$$\lambda_{OA} = \frac{\eta\mu \vartheta}{\sigma\upsilon\nu \vartheta}, \vartheta \in (0, \pi)$$

με $\vartheta \neq \frac{\pi}{2}$. Άρα η κλίση της ευθείας (ε) θα είναι

$$\lambda_{\varepsilon} = -\frac{\sigma\upsilon\nu \vartheta}{\eta\mu \vartheta}, \vartheta \in (0, \pi).$$

(Παρατηρούμε ότι το πιο πάνω ισχύει ακόμη και στην περίπτωση όπου $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.)
Επομένως η εξίσωση της (ε) είναι

$$(\varepsilon) : y = -\frac{\sigma\upsilon\nu \vartheta}{\eta\mu \vartheta} x.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 = R^2$ θα πάρουμε

$$x^2 + \frac{\sigma\upsilon\nu^2 \vartheta}{\eta\mu^2 \vartheta} x^2 = R^2 \iff x^2 (\eta\mu^2 \vartheta + \sigma\upsilon\nu^2 \vartheta) = R^2 \eta\mu^2 \vartheta.$$

Άρα, $x = \pm R \eta\mu \vartheta$. Επομένως,

- Αν $x = R \eta\mu \vartheta$ τότε

$$y = -\frac{\sigma\upsilon\nu \vartheta}{\eta\mu \vartheta} (R \eta\mu \vartheta) = -R \sigma\upsilon\nu \vartheta,$$

δηλαδή έχουμε το σημείο τομής $\Gamma(R \eta\mu \vartheta, -R \sigma\upsilon\nu \vartheta)$.

- Αν $x = -R \eta\mu \vartheta$ τότε

$$y = -\frac{\sigma\upsilon\nu \vartheta}{\eta\mu \vartheta} (-R \eta\mu \vartheta) = R \sigma\upsilon\nu \vartheta,$$

δηλαδή έχουμε το σημείο τομής $B(-R \eta\mu \vartheta, R \sigma\upsilon\nu \vartheta)$.

(β) Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του μέσου $M(x, y)$ της χορδής AB είναι

$$x = \frac{R \sigma\upsilon\nu \vartheta + (-R \eta\mu \vartheta)}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{R \eta\mu \vartheta + R \sigma\upsilon\nu \vartheta}{2}.$$

Η διαφορετικά

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu \vartheta - \eta\mu \vartheta = \frac{2x}{R}, \\ \sigma\upsilon\nu \vartheta + \eta\mu \vartheta = \frac{2y}{R}. \end{cases}$$

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τις σχέσεις αυτές αντίστοιχα θα πάρουμε

$$\sigma\upsilon\nu \vartheta = \frac{x+y}{R} \quad \text{και} \quad \eta\mu \vartheta = \frac{y-x}{R}.$$

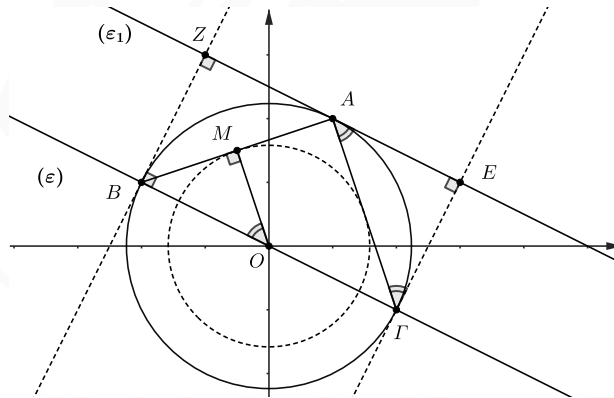
Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\eta\mu^2 \vartheta + \sigma\upsilon\nu^2 \vartheta = 1$ θα έχουμε

$$\left(\frac{y-x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y+x}{R}\right)^2 = 1 \iff 2x^2 + 2y^2 = R^2 \iff x^2 + y^2 = \frac{R^2}{2}.$$

Επομένως η καρτεσιανή εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{\frac{R^2}{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Εναλλακτική Λύση

Ονομάζουμε (ε_1) την εφαπτομένη του κύκλου (K) στο σημείο A . Έστω ότι η ευθεία (ε) που είναι παράλληλη στην (ε_1) και διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου τέμνει τον (K) στα σημεία B και Γ . Έστω ότι οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία B και Γ τέμνουν την (ε_1) στα σημεία Z και E αντίστοιχα.



Τότε έχουμε $\angle BZA = \angle ΓEA = 90^\circ$ και αφού (από ιδιότητες εφαπτόμενων τμημάτων) $AZ = ZB = EΓ = EA$ τότε τα ορθογώνια τρίγωνα BZA και $ΓEA$ είναι ίσα και ισοσκελή. Επομένως και το ορθογώνιο τρίγωνο $BAΓ$ είναι ισοσκελές. Τότε αφού η $BΓ$ είναι διάμετρος του τριγώνου έχουμε

$$2(AB)^2 = (AB)^2 + (AΓ)^2 = 4R^2 \implies AB = AΓ = R\sqrt{2}.$$

Επομένως το AB έχει σταθερό μήκος όταν το σημείο A κινείται πάνω στον κύκλο. Άρα και το τμήμα OM που ενώνει τα μέσα των πλευρών $BΓ$ και AB είναι σταθερό με μήκος $OM = \frac{AΓ}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως το σημείο M κινείται πάνω σε κύκλο με κέντρο $O = (0, 0)$ και ακτίνα $\rho = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.

B5. Έστω συνάρτηση f , για την οποία ισχύει ότι $f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f'(0) = 4$ και $f(0) = 1$.

(α) Αν $u(x) = f'(x) - 2f(x)$, να αποδείξετε ότι $u'(x) - 3u(x) = 0$. (Μονάδες 3)

(β) Να αποδείξετε ότι $u(x) = 2e^{3x}$. (Μονάδες 3)

(γ) Να αποδείξετε ότι $(e^{-2x}f(x))' = 2e^x$. (Μονάδες 2)

(δ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 2)

Λύση

(α) Έστω $u(x) = f'(x) - 2f(x)$. Τότε

$$u'(x) - 3u(x) = f''(x) - 2f'(x) - 3(f'(x) - 2f(x)) = f''(x) - 5f'(x) + 6f(x) = 0.$$

(β) Από το (α) έχουμε

$$\begin{aligned} u'(x) - 3u(x) = 0 &\implies (u'(x) - 3u(x))e^{-3x} = 0 \\ &\implies (u(x)e^{-3x})' = 0 \\ &\implies \int u(x)e^{-3x} dx = 0 \\ &\implies u(x)e^{-3x} + c = 0. \end{aligned}$$

Για $x = 0$ είναι $u(0) + c = 0 \implies c = -2$ αφού $u(0) = f'(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2$.
Άρα

$$u(x)e^{-3x} - 2 = 0 \implies u(x) = 2e^{3x}.$$

Εναλλακτική Λύση

Ορίζουμε $v(x) = u(x)u(-x)$. Τότε

$$v'(x) = u'(x)u(-x) - u(x)u'(-x) = 3u(x)u(-x) - u(x)(3u(-x)) = 0.$$

Συνεπώς η v είναι σταθερή συνάρτηση. Αφού $u(0) = f'(0) - 2f(0) = 2$, τότε $v(0) = 4$ και άρα $u(x)u(-x) = v(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεραίνουμε ότι $u(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού επίσης η $u(x)$ είναι συνεχής τότε διατηρεί πρόσημο. Αφού $u(0) = 2$, τότε η $u(x)$ είναι πάντοτε θετική.

Αφού η $u(x)$ δεν μηδενίζεται, μπορούμε να διαιρέσουμε την $u'(x) = 3u(x)$ με $u(x)$ για να πάρουμε

$$\begin{aligned} u'(x) = 3u(x) &\implies \frac{u'(x)}{u(x)} = 3 \implies \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int 3 dx \\ &\implies \ln(|u(x)|) = 3x + c \implies \ln(u(x)) = 3x + c \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε ότι η $u(x)$ είναι θετική.

Για $x = 0$ παίρνουμε $c = \ln 2$. Άρα

$$\ln(u(x)) = 3x + \ln 2 \implies u(x) = 2e^{3x}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

(γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}(e^{-2x}f(x))' &= -2e^{-2x}f(x) + e^{-2x}f'(x) \\ &= e^{-2x}(f'(x) - 2f(x)) \\ &= e^{-2x}u(x) = e^{-2x}(2e^{3x}) = 2e^x.\end{aligned}$$

(δ) Από το (γ)

$$\int (e^{-2x}f(x))' dx = \int 2e^x dx \implies e^{-2x}f(x) = 2e^x + c.$$

Για $x = 0$ έχουμε

$$f(0) = 2 + c \implies c = -1 \implies e^{-2x}f(x) = 2e^x - 1 \implies f(x) = 2e^{3x} - e^{2x}.$$