Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101, Φαξ: 357 – 22379122
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Ημερομηνία: 15/06/2026

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α′: **Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

Α1. Να βρείτε το πιο κάτω ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{\text{τοξημ}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Πρώτη Λύση

Έστω $u = \text{τοξημ}\, x$. Τότε $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$. Άρα

$$\int \frac{\text{τοξημ}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + c = \frac{\text{τοξημ}^2 x}{2} + c.$$

Δεύτερη Λύση

Έχουμε

$$\int \frac{\text{τοξημ}\, x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \text{τοξημ}\, x\,\mathrm{d}(\text{τοξημ}\, x) = \frac{\text{τοξημ}^2 x}{2} + c.$$

Α2. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, το $f(2) = -1$. Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β. **(Μονάδες 3)**

β) Αν $\alpha = -3$ και $\beta = 3$, να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. **(Μονάδες 2)**

Λύση

α) Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(2) = 0$. Επειδή $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, τότε

$$f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x.$$

Άρα:

$$f'(2) = 3\cdot 2^2 + 2\alpha\cdot 2 = 12 + 4\alpha = 0 \implies 4\alpha = -12 \implies \alpha = -3.$$

Αντικαθιστούμε $\alpha = -3$ και έχουμε

$$f(2) = -1 \implies 2^3 + (-3) \cdot 2^2 + \beta = -1 \implies 8 - 12 + \beta = -1 \implies \beta = 3.$$

β) Με $\alpha = -3, \beta = 3$ ο τύπος της f γίνεται $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$. Έχουμε

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 \implies f'(x) = 3x^2 - 6x \implies f''(x) = 6x - 6.$$

Για το σημείο καμπής λύνουμε την $f''(x) = 0$:

$$f''(x) = 0 \implies 6x - 6 = 0 \implies x = 1.$$

Επίσης $f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f''

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$			ΣΚ		

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα η f παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$ το $(1, 1)$.

Α3. Εννέα σύνεδροι, εκ των οποίων ο ένας είναι ο πρόεδρος, οι δύο είναι σύμβουλοι και οι υπόλοιποι είναι μέλη, θα καθίσουν γύρω από ένα στρογγυλό τραπέζι για να συνεδριάσουν. Ο πρόεδρος και οι δύο σύμβουλοι του θα κάθονται σε διαδοχικές θέσεις. Αν ο πρόεδρος πρέπει να κάθεται πάντοτε στη μεσαία θέση, ανάμεσα στους δύο συμβούλους του, να βρείτε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να γίνει η τοποθέτηση όλων των συνέδρων.

Λύση

Θεωρούμε ως μία ομάδα τους 3 που θα κάθονται μαζί (τον πρόεδρο και τους δύο συμβούλους), επομένως έχουμε κυκλική μετάθεση 7 ατόμων $(9 - 3 + 1 = 7)$. Επειδή όμως στην ομάδα των τριών που θα κάθονται μαζί μπορούν να εναλλάσσονται οι δύο στην άκρη, θα έχουμε μία μετάθεση 2 στοιχείων.

Έτσι συνολικά το πλήθος των διαφορετικών τρόπων που κάθονται κυκλικά οι 9 σύνεδροι είναι

$$K_7 \cdot M_2 = (7-1)! \cdot 2! = 6! \cdot 2! = 720 \cdot 2 = 1440.$$

Α4. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\kappa^2 + 9k + 20} = \frac{1}{\kappa + 4} - \frac{1}{\kappa + 5}$$

(Μονάδες 1)

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα της πιο κάτω σειράς:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{\kappa^2 + 9\kappa + 20}$$

(Μονάδες 2)

γ) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x^2+9x+23}{x^2+9x+20}\,\mathrm{d}x$$

(Μονάδες 2)

Λύση

α) **Πρώτος Τρόπος**

Το κλάσμα γράφεται ως:

$$\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}=\frac{1}{(\kappa+4)(\kappa+5)}.$$

Αναζητούμε $A,B\in\mathbb{R}$, ώστε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x+4)(x+5)}&\equiv\frac{A}{x+4}+\frac{B}{x+5}\quad\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-4,-5\}\\ \iff 1&\equiv A(x+5)+B(x+4)\quad\forall x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Δίνοντας τιμές στο x έχουμε:

$$\begin{aligned}x=-5\ \Rightarrow\ 1=-B\ \Rightarrow\ B=-1,\\ x=-4\ \Rightarrow\ 1=A\ \Rightarrow\ A=1.\end{aligned}$$

Έτσι, Θέτοντας $x=\kappa$ προκύπτει η σχέση:

$$\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}=\frac{1}{\kappa+4}-\frac{1}{\kappa+5}\quad\forall\kappa\neq-4,-5$$

Δεύτερος Τρόπος

Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε τα A και B στην

$$1\equiv A(x+5)+B(x+4)\equiv(A+B)x+5A+4B$$

εξισώνοντας συντελεστές:

$$\left\{\begin{array}{c}A+B=0\\5A+4B=1\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{c}B=-A\\5A-4A=1\end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{c}A=1\\B=-1\end{array}\right\}.$$

Τρίτος Τρόπος

Εναλλακτικά, παίρνοντας το δεύτερο μέρος της ισότητας και κάνοντας ομώνυμα έχουμε:

$$\frac{1}{\kappa+4}-\frac{1}{\kappa+5}=\frac{\kappa+5-\kappa-4}{(\kappa+4)(\kappa+5)}=\frac{1}{(\kappa+4)(\kappa+5)}=\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}.$$

β) Το κλάσμα

$$\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}$$

από το (α) γράφεται και ως

$$\frac{1}{\kappa+4}-\frac{1}{\kappa+5}.$$

Επομένως, το μερικό άθροισμα s_ν των ν πρώτων όρων είναι:

$$
\begin{aligned}
s_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20} &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}\left(\frac{1}{\kappa+4}-\frac{1}{\kappa+5}\right)\\
&= \left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\nu+4}-\frac{1}{\nu+5}\right)\right]\\
&= \frac{1}{5}-\frac{1}{\nu+5}.
\end{aligned}
$$

Επομένως:

$$\lim_{\nu\to+\infty} s_\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{\nu+5}\right)=\frac{1}{5}.$$

Έτσι:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty}\frac{1}{\kappa^2+9\kappa+20}=\frac{1}{5}.$$

γ)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+9x+23}{x^2+9x+20}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+9x+20}{x^2+9x+20}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x^2+9x+20}\,\mathrm{d}x\\
&= \int 1\,\mathrm{d}x + 3\int\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x\\
&= x+3\left(\ln|x+4|-\ln|x+5|\right)+c.
\end{aligned}
$$

Α5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - xe^x = \ln x + \lambda,\ x\in(0,+\infty),\ \lambda\in\mathbb{R}$, έχει το πολύ μια λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Πρώτη Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=e^x-xe^x-\ln x-\lambda,\ x\in(0,+\infty),\ \lambda\in\mathbb{R}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x)=e^x-(e^x+xe^x)-\frac{1}{x}=-\left(xe^x+\frac{1}{x}\right),\quad \forall x\in(0,+\infty).$$

Επειδή ισχύει ότι $xe^x+\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(0,\infty)$, από τα πιο πάνω προκύπτει ότι $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(0,\infty)$.

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα γνησίως μονότονη στο διάστημα $(0,+\infty)$, οπότε η εξίσωση $f(x)=0$, δηλαδή η εξίσωση $e^x-xe^x=\ln x+\lambda$ έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Δεύτερη Λύση

Θα εργαστούμε με την εις άτοπο απαγωγή. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση

$$e^x-xe^x=\ln x+\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές λύσεις $x_1,\ x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$. Θεωρούμε τη

συνάρτηση

$$f(x) = e^x - xe^x - \ln x - \lambda,\ x \in (0, +\infty),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε ότι:

- η f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2]$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2) με

$$f'(x) = e^x - (e^x + xe^x) - \frac{1}{x} = -\left(xe^x + \frac{1}{x}\right), \quad \forall x \in (x_1, x_2).$$

- $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Συνεπώς, η συνάρτηση f ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0, +\infty)$, τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$f'(\xi) = 0 \iff \xi e^{\xi} + \frac{1}{\xi} = 0$$

Το τελευταίο είναι άτοπο, διότι ισχύει $\xi e^{\xi} + \frac{1}{\xi} > 0$ (αφού $\xi > 0$).

Καταλήξαμε σε άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η εξίσωση

$$e^x - xe^x = \ln x + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

έχει τουλάχιστον δύο διαφορετικές λύσεις στο διάστημα $(0, +\infty)$, άρα η πιο πάνω εξίσωση έχει το πολύ μία λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Α6. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C) : x^2 + y^2 = 4$ και η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 8x$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας E και την εξίσωση της διευθετούσας δ της παραβολής. **(Μονάδες 1)**

β) Έστω $N(2\,\text{συν}\,\theta, 2\,\text{ημ}\,\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$, τυχαίο σημείο του κύκλου (C) και $\Sigma(x, y)$ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος EN. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι κύκλος με εξίσωση $(C_1) : (x-1)^2 + y^2 = 1$. **(Μονάδες 2,5)**

γ) Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων (C) και (C_1). **(Μονάδες 1,5)**

Λύση

α) Η εστία της παραβολής έχει συντεταγμένες $E(2, 0)$ και η διευθετούσα της παραβολής έχει εξίσωση $\delta : x = -2$.

β) Έχουμε

$$x_{\Sigma} = \frac{x_N + x_E}{2} = \frac{2\,\text{συν}\,\theta + 2}{2} = 1 + \text{συν}\,\theta \ \Rightarrow\ \text{συν}\,\theta = x - 1$$

και

$$y_{\Sigma} = \frac{y_N + y_E}{2} = \frac{2\,\text{ημ}\,\theta}{2} = \text{ημ}\,\theta \ \Rightarrow\ \text{ημ}\,\theta = y.$$

Επομένως,

$$\text{ημ}^2\,\theta + \text{συν}^2\,\theta = 1 \ \Rightarrow\ (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Άρα, η εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Σ είναι ο κύκλος με εξίσωση

$$(C_1) : (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

γ) Ο κύκλος $(C) : x^2 + y^2 = 4$ έχει κέντρο $K(0,0)$ και ακτίνα $R = 2$.
Ο κύκλος $(C_1) : (x-1)^2 + y^2 = 1$ έχει κέντρο $\Lambda(1,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
Το μήκος της διακέντρου είναι $K\Lambda = 1 = R - \rho$. Άρα, οι κύκλοι (C) και (C_1) εφάπτονται εσωτερικά.

Α7. α) Έστω ότι X, Y είναι δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(X' \cap Y') = P(X') \cdot P(Y')$$

β) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με

$$P(A) = 3P(A'), \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{7}{8},$$

να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' \cap B')$.

Λύση

α) Αφού από την υπόθεση τα ενδεχόμενα X, Y του ίδιου δειγματικού χώρου είναι ανεξάρτητα, θα ισχύει:

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y). \tag{1}$$

Από τους κανόνες του De Morgan, ξέρουμε ότι

$$P(X' \cap Y') = P((X \cup Y)').$$

Επομένως, θα έχουμε

$$P(X' \cap Y') = P((X \cup Y)') = 1 - P(X \cup Y).$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πιθανοτήτων, παίρνουμε

$$P(X' \cap Y') = 1 - P(X) - P(Y) + P(X \cap Y).$$

Άρα από την (1) θα έχουμε

$$P(X' \cap Y') = 1 - P(X) - P(Y) + P(X)P(Y) = (1 - P(X))(1 - P(Y)).$$

Επομένως,

$$P(X' \cap Y') = (1 - P(X))(1 - P(Y)) = P(X')P(Y').$$

β) Από τις δεδομένες σχέσεις και χρησιμοποιώντας ιδιότητες πιθανοτήτων, έχουμε

$$P(A) = 3P(A') \;\Rightarrow\; P(A) = 3 - 3P(A) \;\Rightarrow\; 4P(A) = 3 \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{3}{4}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) = \frac{7}{8} \;&\Rightarrow\; P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{8} \\ &\Rightarrow\; P(A \cap B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{7}{8} \\ &\Rightarrow\; P(A \cap B) = \frac{3}{8}. \qquad (2) \end{aligned}$$

Όμως,

$$P(A)P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}. \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3), ισχύει ότι

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Επομένως, τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Χρησιμοποιώντας το α), παίρνουμε

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = \left(1 - \frac{3}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

A8. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{τοξεφ}\, x > 1 - e^x, \qquad \forall x > 0$$

(Μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{τοξεφ}\, x + e^x - 1}{x}$$

(Μονάδες 2)

Λύση

α) **Πρώτος τρόπος**: Οι συναρτήσεις τοξεφ x και e^x είναι γνησίως αύξουσες σε όλο το $\mathbb{R}$. Πράγματι, οι συναρτήσεις αυτές έχουν παραγώγους $(\text{τοξεφ}\, x)' = \frac{1}{1+x^2} > 0$ και $(e^x)' = e^x > 0$ αντίστοιχα. Επομένως, για κάθε $x > 0$, θα είναι

$$\text{τοξεφ}\, x > \text{τοξεφ}\, 0 = 0$$

και

$$e^x > e^0 = 1 \;\Rightarrow\; 0 > 1 - e^x.$$

Είναι άρα

$$\text{τοξεφ}\, x > 0 > 1 - e^x \quad \forall x > 0.$$

Δεύτερος τρόπος: Έστω $f(x) = \text{τοξεφ}\, x + e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

αφού $\frac{1}{1+x^2} > 0$ και $e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Ακόμα, έχουμε $f(0) = 0$, και άρα, από τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης, $f(x) > f(0) = 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα,

$$\text{τοξεφ}\, x + e^x - 1 > 0 \quad \forall x > 0,$$

δηλαδή

$$\text{τοξεφ}\, x > 1 - e^x \quad \forall x > 0.$$

β) Θέλουμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξεφ}\, x + e^x - 1}{x}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 0} (\text{τοξεφ}\, x + e^x - 1) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή 0/0. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\text{τοξεφ}\, x + e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} + e^x}{1} = 2.$$

Επομένως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{τοξεφ}\, x + e^x - 1}{x} = 2.$$

A9. α) Έστω ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$\int e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x = e^{-x}\big(f'(x) + f(x)\big) + c$$

β) Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + x\ln x\right)\mathrm{d}x$$

Λύση

α) Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\big(f''(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x &= \int e^{-x} f''(x)\,\mathrm{d}x - \int e^{-x} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int e^{-x}\,\mathrm{d}\left(f'(x)\right) - \int f(x)\,\mathrm{d}\left(-e^{-x}\right) \\
&= e^{-x} f'(x) + \int e^{-x} f'(x)\,\mathrm{d}x - \left[-e^{-x} f(x) + \int e^{-x} f'(x)\,\mathrm{d}x\right] \\
&= e^{-x} f'(x) + e^{-x} f(x) + \left(\int e^{-x} f'(x)\,\mathrm{d}x - \int e^{-x} f'(x)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= e^{-x}\left(f'(x)+f(x)\right) + c.
\end{aligned}
$$

β) Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = -x\ln x$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, με $f''(x) = (-1-\ln x)' = -\frac{1}{x}$.
Επομένως, θέτοντας $f(x) = -x\ln x$ στην προηγούμενη σχέση, θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int e^{-x}\left(-\frac{1}{x} + x\ln x\right)\mathrm{d}x &= e^{-x}\left(-1-\ln x - x\ln x\right) + c \\
&= -e^{-x}\left(1+(x+1)\ln x\right) + c.
\end{aligned}
$$

Α10. α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση που δίνεται, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$
\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x = \pi + 2, \qquad x = 2\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}
$$

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από το ημικύκλιο $y = \sqrt{8-x^2}$, την καμπύλη $y = x^3+4$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία $x = 2$.

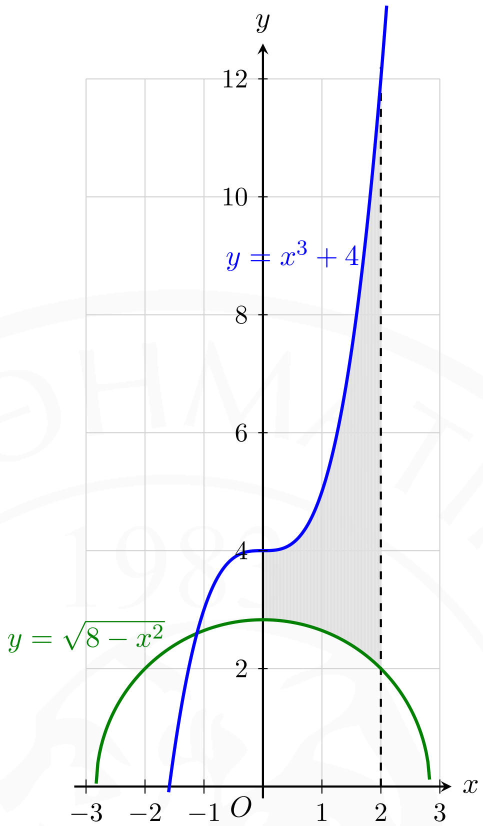
Λύση

α) Έστω $x = 2\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\vartheta$. Τότε $\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}\,\text{συν}\,\vartheta \mathrm{d}\vartheta$. Για $x = 0$ είναι $\vartheta = 0$ και για $x = 2$ είναι $\vartheta = \frac{\pi}{4}$. Άρα

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{8-(2\sqrt{2}\,\text{ημ}\,\vartheta)^2}\cdot\left(2\sqrt{2}\,\text{συν}\,\vartheta\right)\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{8-8\,\text{ημ}^2\,\vartheta}\cdot\text{συν}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \sqrt{8}\sqrt{\text{συν}^2\,\vartheta}\cdot\text{συν}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 8\int_0^{\pi/4} |\,\text{συν}\,\vartheta|\,\text{συν}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = 8\int_0^{\pi/4}\text{συν}^2\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 8\int_0^{\pi/4}\frac{1+\text{συν}\,2\vartheta}{2}\,\mathrm{d}\vartheta = 4\int_0^{\pi/4}(1+\text{συν}\,2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \left[4\vartheta + \frac{4\,\text{ημ}\,2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/4} = \left(4\cdot\frac{\pi}{4} + 2\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{2}\right) - (4\cdot 0 + 2\,\text{ημ}\,0) \\
&= \pi + 2
\end{aligned}
$$

Στην τέταρτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε ότι συν $\vartheta > 0$ στο $[0, \frac{\pi}{4}]$.

β) Όπως φαίνεται και στο πιο κάτω σχήμα, ισχύει ότι $x^3+4 > \sqrt{8-x^2}$ για $x \in [0,2]$.



Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 \left((x^3+4) - \sqrt{8-x^2} \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 (x^3+4)\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + 4x \right]_0^2 - (\pi+2) \\ &= \left(\frac{16}{4} + 8 \right) - (0+0) - (\pi+2) = (10-\pi)\,\text{τ.μ.} \end{aligned}$$

Σημείωση: Μπορούμε να ελέγξουμε και αλγεβρικά ότι για $x \in [0,2]$ έχουμε

$$x^3 + 4 \geqslant 4 > \sqrt{8} \geqslant \sqrt{8-x^2}.$$

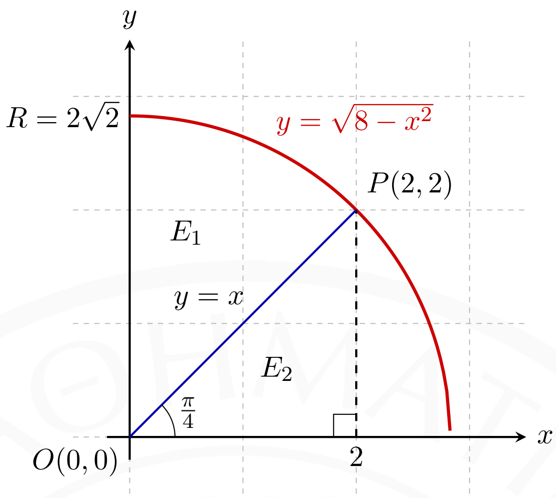
Δεύτερος Τρόπος για το (α)

Το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \sqrt{8-x^2}\,dx$$

αντιπροσωπεύει το εμβαδόν κάτω από τον κύκλο $x^2+y^2 = (\sqrt{8})^2$ από $x=0$ έως $x=2$. Ο κύκλος αυτός έχει ακτίνα $R = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Στο $x=2$, το σημείο του κύκλου είναι το $(2,2)$. Επίσης η ευθεία $y=x$ σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ (45°) με τους άξονες. Επομένως, το εμβαδόν από $x=0$ έως $x=2$ μπορεί να διαχωριστεί σε:

- Ένα κυκλικό τομέα από $\theta = \frac{\pi}{4}$ έως $\frac{\pi}{2}$ (που είναι γωνία $\frac{\pi}{4}$), με εμβαδό E_1, και
- ένα ορθογώνιο τρίγωνο με βάση 2 και ύψος 2, με εμβαδό E_2.



Έχουμε λοιπόν:

$$\text{Συνολικό Εμβαδό} = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}R^2\theta + \frac{1}{2}(\text{βάση} \cdot \text{ύψος}) = \frac{1}{2}(8)\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}(2 \cdot 2) = \pi + 2$$

<u>ΜΕΡΟΣ Β′</u>: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής παράστασής της με τους άξονες των συντεταγμένων.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

ε) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

στ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών λύσεων της εξίσωσης $f(x) = k$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 1-2-2-2-2-1)

Λύση

Πεδίο Ορισμού: $\mathbb{R} - \{1\}$.

Σημεία τομής με τους άξονες:

- Αν $x = 0$ τότε $y = 0$.
- Αν $y = 0$ τότε $x = 0$.

Άρα το μοναδικό σημείο τομής με τους άξονες είναι το $(0, 0)$.

Μονοτονία - Τοπικά Ακρότατα:

Για τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f εξετάζουμε το πρόσημο και τις ρίζες της f'. Έχουμε

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

άρα

$$f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	max	↘	‖	↘	min	↗	

Παρατηρούμε ότι:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$.

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0,1)$ και $(1,2]$.
- Στο $x=0$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο με τιμή $f(0)=0$ και στο $x=2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(2)=4$.

Διαστήματα κυρτότητας και σημεία καμπής:

Έχουμε

$$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2x^2-4x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f''.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$		$+$
$f(x)$			

Παρατηρούμε ότι

- Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,1)$.
- Η f είναι κυρτή στο διάστημα $(1,+\infty)$.
- Δεν υπάρχουν σημεία καμπής.

Ασύμπτωτες

Έχουμε

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2\cdot\frac{1}{x-1}=1\cdot(+\infty)=+\infty$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2\cdot\frac{1}{x-1}=1\cdot(-\infty)=-\infty.$$

Άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη.

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1=\lambda$$

και

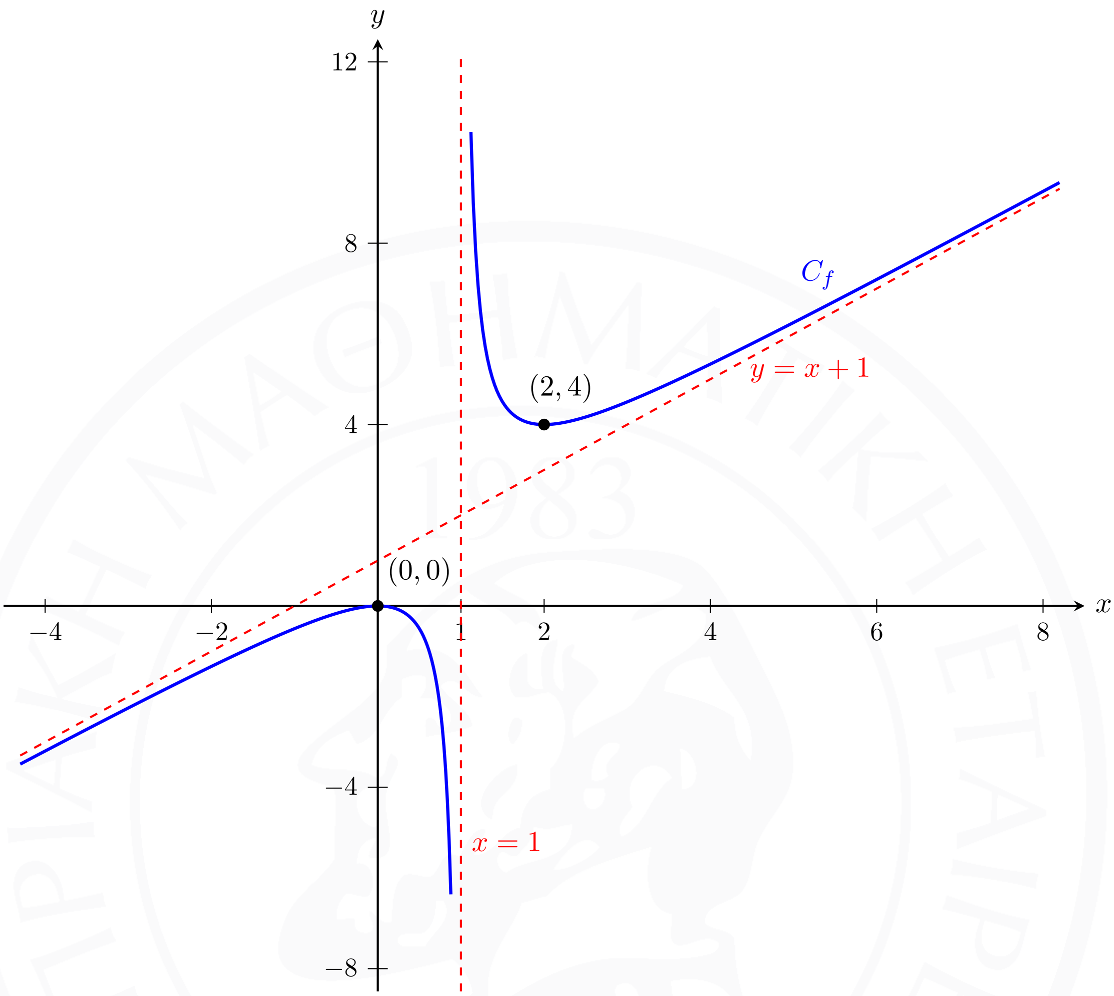
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-x^2+x}{x-1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1=\beta\end{aligned}$$

Ομοίως και για το όριο όταν $x\to-\infty$. Άρα

- Η $y=x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$ και για $x\to-\infty$.
- Αφού παρουσιάζει πλάγια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$ και για $x\to-\infty$, δεν παρουσιάζει οριζόντιες ασύμπτωτες.

Γραφική Παράσταση

Με τις πιο πάνω πληροφορίες έχουμε την γραφική παράσταση της f όπως φαίνεται πιο κάτω:



Από τα προηγούμενα βρίσκουμε τα εξής για το πλήθος των λύσεων της $f(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$.

- $k \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$: Ακριβώς 2 λύσεις.
- $k = 0$ ή $k = 4$: Ακριβώς 1 λύση.
- $k \in (0, 4)$: 0 λύσεις.

B2. Έστω συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ και η ευθεία $(\varepsilon) : 3x - y = 2$ εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της στο σημείο $(3, f(3))$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f για την οποία ισχύει ότι:

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}, \quad x > -1$$

Λύση

Επειδή η ευθεία (ε) εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f, θα ισχύει ότι $f'(3) = 3$ και $f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 7$.

Ισχύει ακόμα ότι

$$f'(x) = \int f''(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x+1} + c.$$

Από $f'(3) = 3$, θα είναι

$$2\sqrt{4} + c = 3 \;\Rightarrow\; c = -1.$$

Άρα,

$$f'(x) = 2\sqrt{x+1} - 1, \quad x > -1.$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(2\sqrt{x+1} - 1\right)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - x + k = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - x + k.$$

Από $f(3) = 7$, θα είναι

$$\frac{4}{3}\left(\sqrt{4}\right)^3 - 3 + k = 7 \;\Rightarrow\; \frac{32}{3} - 3 + k = 7 \;\Rightarrow\; k = -\frac{2}{3}.$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - x - \frac{2}{3}, \quad x > -1.$$

B3. Ένα κουτί περιέχει 10 όμοιες μπάλες από τις οποίες οι 7 είναι κόκκινες και οι 3 είναι πράσινες. Παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες τυχαία από το κουτί. Αν η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη, τότε χωρίς να την επανατοποθετήσουμε στο κουτί παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα. Ενώ, αν η πρώτη μπάλα είναι πράσινη, τότε την επανατοποθετούμε στο κουτί και στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα η δεύτερη μπάλα που πήραμε να είναι πράσινη. **(Μονάδες 6)**

β) Αν η δεύτερη μπάλα που πήραμε είναι πράσινη, ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη μπάλα που πήραμε να είναι κόκκινη; **(Μονάδες 4)**

Λύση

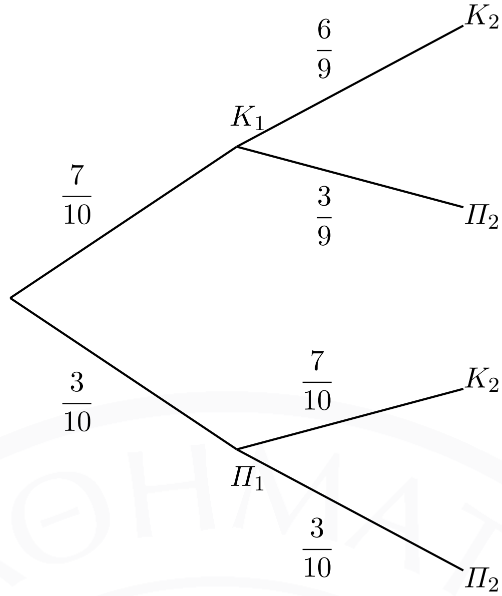
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

K_1: «Η πρώτη μπάλα είναι κόκκινη»

Π_1: «Η πρώτη μπάλα είναι πράσινη»

Π_2: «Η δεύτερη μπάλα είναι πράσινη»

Φτιάχνουμε το παρακάτω δενδροδιάγραμμα



α)

$$\begin{aligned} P(\Pi_2) &= P(K_1 \cap \Pi_2) + P(\Pi_1 \cap \Pi_2) \\ &= \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30} + \frac{9}{100} = \frac{700+270}{3000} = \frac{970}{3000} = \frac{97}{300}. \end{aligned}$$

β)

$$P(K_1|\Pi_2) = \frac{P(K_1 \cap \Pi_2)}{P(\Pi_2)} = \frac{\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9}}{\frac{97}{300}} = \frac{\frac{7}{30}}{\frac{97}{300}} = \frac{70}{97}.$$

B4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t),\ t \neq 0$. Στο σημείο A φέρουμε εφαπτόμενη (ε) η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο Γ και τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο B.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) είναι:

$$(\varepsilon): \quad ty = x + t^2$$

(Μονάδες 2)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση του σχήματος στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Δ για το οποίο το $BO\Gamma\Delta$ (όπου O η αρχή των αξόνων) είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είναι η παραβολή $y^2 = -x$. **(Μονάδες 3)**

γ) Θεωρούμε ότι το σημείο $A(t^2, 2t)$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο $(t > 0)$. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = -x$, τον άξονα των τεταγμένων και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta$, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_1. Το χωρίο που περικλείεται από την παραβολή $y^2 = 4x$, τον άξονα των τεταγμένων και την ευθεία (ε), περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τεταγμένων και παράγει όγκο V_2. Να αποδείξετε ότι:

$$V_1 = 3V_2$$

(Μονάδες 5)

Λύση

α) Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την $y^2 = 4x$ θα έχουμε ότι

$$2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4,$$

και άρα

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{y}.$$

Επομένως, η κλίση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4x$ στο σημείο της $\left(t^2, 2t\right)$ θα είναι

$$\lambda_\varepsilon = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $\left(t^2, 2t\right)$ θα είναι

$$(\varepsilon): \quad y - 2t = \frac{1}{t}(x - t^2),$$

ή

$$(\varepsilon): \quad yt - 2t^2 = x - t^2,$$

ή

$$(\varepsilon): \quad yt = x + t^2.$$

β) Για τις συντεταγμένες του σημείου B, θέτουμε $x = 0$ στην (ε): $yt = x + t^2$. Παίρνουμε $y = t$. Άρα, $B(0, t)$.

Για τις συντεταγμένες του σημείου $\varGamma$, θέτουμε $y = 0$ στην (ε): $yt = x + t^2$. Παίρνουμε $x = -t^2$. Άρα, $\varGamma(-t^2, 0)$.

Αν $\varDelta$ τυχαίο σημείο του γεωμετρικού τόπου, θα έχουμε $x = -t^2, y = t$.

Απαλείφοντας την παράμετρο, η καρτεσιανή εξίσωση του Γεωμετρικού τόπου είναι η παραβολή με εξίσωση

$$y^2 = -x.$$

γ) Για τον όγκο V_1 του στερεού θα έχουμε

$$V_1 = \pi\int_0^t x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_0^t y^4\,\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^t = \pi\frac{t^5}{5} \implies V_1 = \frac{1}{5}\pi t^5 \text{ κ.μ.} \qquad (1)$$

Έστω E το σημείο τομής της κάθετης από το σημείο $A(t^2, 2t)$ προς τον άξονα των τεταγμένων. Τότε, $E(0, 2t)$. Επομένως, για τον όγκο V_2, θα έχουμε

$$V_2 = \pi\int_0^{2t} x^2\,\mathrm{d}y - V_{\text{Κώνου(ABE)}} = \pi\int_0^{2t}\frac{y^4}{16}\,\mathrm{d}y - \frac{\pi R^2 \upsilon}{3}.$$

Επειδή η ακτίνα του κώνου που παράγεται είναι $R = t^2$ και το ύψος του $\upsilon = 2t - t = t$, θα πάρουμε

$$V_2 = \frac{\pi}{16}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2t} - \frac{\pi t^4 t}{3} = \frac{2}{5}\pi t^5 - \frac{1}{3}\pi t^5 \implies V_2 = \frac{1}{15}\pi t^5 \text{ κ.μ.} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), θα έχουμε

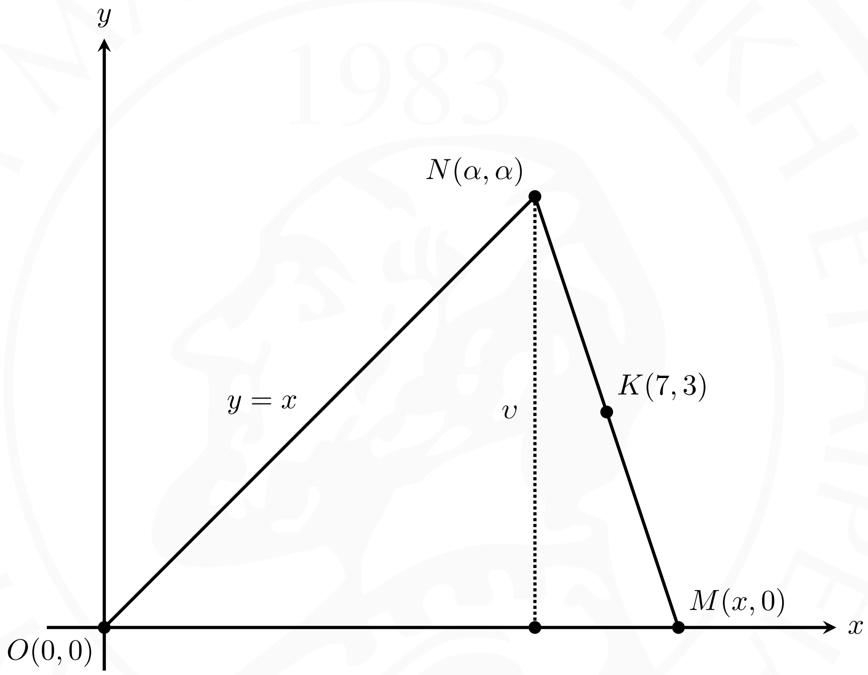
$$V_1 = 3V_2.$$

B5. Η ευθεία που διέρχεται του σημείου $K(7,3)$ τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox στο σημείο M και την ευθεία $y = x$ στο πρώτο τεταρτημόριο στο σημείο N. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και N έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OMN (όπου O η αρχή των αξόνων) να είναι ελάχιστο.

Πρώτη Λύση

Αφού το σημείο N βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο και ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = x$, έχει συντεταγμένες $N(\alpha, \alpha)$, $\alpha > 0$.

Αφού το σημείο M βρίσκεται στον θετικό ημιάξονα των τετμημένων, έχει συντεταγμένες $M(x, 0)$, $x > 0$.



Τα σημεία $M(x,0)$, $K(7,3)$ και $N(\alpha,\alpha)$ είναι συνευθειακά, και άρα ισχύει:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ανάπτυγμα ως προς την 1η γραμμή)}$$

$$\Rightarrow\; x \cdot (3 - \alpha) + 7\alpha - 3\alpha = 0$$

$$\Rightarrow\; x \cdot (3 - \alpha) = -4\alpha$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{4\alpha}{\alpha - 3},\; \alpha > 3,\; (\text{αφού } x > 0).$$

Άρα τα σημεία M, N έχουν συντεταγμένες $M\left(\frac{4\alpha}{\alpha-3}, 0\right)$ και $N(\alpha, \alpha)$ αντίστοιχα.

Αν E είναι το εμβαδόν του τριγώνου OMN ισχύει:

$$E = \frac{(OM)\cdot \upsilon}{2} = \frac{x_M \cdot y_N}{2} \;\Rightarrow\; E(\alpha) = \frac{\frac{4\alpha}{\alpha-3}\cdot \alpha}{2}$$
$$\Rightarrow\; E(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{\alpha-3},\;\alpha>3.$$

Για ελάχιστο εμβαδόν θέτουμε $E'(\alpha)=0$, οπότε έχουμε:

$$E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \frac{4\alpha(\alpha-3)-2\alpha^2\cdot 1}{(\alpha-3)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2\alpha^2-12\alpha}{(\alpha-3)^2}=0 \Leftrightarrow 2\alpha(\alpha-6)=0.$$

Άρα,

$$E'(\alpha)=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \text{ (απορρίπτεται) ή } \alpha=6 \text{ (δεκτή)}.$$

Για να ελέγξουμε αν έχουμε ολικό ελάχιστο υπολογίζουμε τη δεύτερη παράγωγο:

$$E''(\alpha)=\frac{(4\alpha-12)(\alpha-3)^2-2(2\alpha^2-12\alpha)(\alpha-3)}{(\alpha-3)^4}=\frac{(4\alpha-12)(\alpha-3)-2(2\alpha^2-12\alpha)}{(\alpha-3)^3}$$

Παρατηρούμε ότι $E''(6)=\frac{4}{3}>0$, άρα για $\alpha=6$ το εμβαδό E γίνεται ελάχιστο.

Για $\alpha=6$, τα σημεία M, N έχουν συντεταγμένες $M(8,0)$ και $N(6,6)$.

Δεύτερη Λύση

Υποθέτουμε ότι η ευθεία δεν είναι κατακόρυφη, και άρα έχει εξίσωση της μορφής $(\varepsilon)\colon y=\lambda x+\beta$.

Αφού το σημείο $K(7,3)$ ανήκει στην ευθεία, θα έχουμε

$$3=7\lambda+\beta \;\Rightarrow\; \beta=3-7\lambda.$$

Για να βρούμε το σημείο M, θέτουμε $y=0$ στην (ε). Θα έχουμε άρα $\lambda x+\beta=0$, οπότε $x_M=-\frac{\beta}{\lambda}=\frac{7\lambda-3}{\lambda}$. Δηλαδή, $M\left(\frac{7\lambda-3}{\lambda},0\right)$.

Για να βρούμε το σημείο N, θέλουμε $y=x$ και $y=\lambda x+\beta$. Δηλαδή:

$$x=\lambda x+\beta \;\Rightarrow\; \lambda x-x=-\beta \;\Rightarrow\; x_N=-\frac{\beta}{\lambda-1}=\frac{7\lambda-3}{\lambda-1},$$

που δίνει $y_N=x_N=\frac{7\lambda-3}{\lambda-1}$ και άρα $N(\frac{7\lambda-3}{\lambda-1},\frac{7\lambda-3}{\lambda-1})$. Θέλουμε $x_M>0$ και $x_N>0$. Θέλουμε άρα:

$$\frac{7\lambda-3}{\lambda}>0, \quad \text{και} \quad \frac{7\lambda-3}{\lambda-1}>0.$$

Η πρώτη ανίσωση δίνει $\lambda\in\mathbb{R}-[0,\frac{3}{7}]$, ενώ η δεύτερη $\lambda\in\mathbb{R}-[\frac{3}{7},1]$. Θα είναι άρα $\lambda\in\mathbb{R}-[0,1]$.

Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδόν του τριγώνου OMN. Η τιμή του εμβαδού όταν η ευθεία είναι κατακόρυφη είναι ίση με το όριο της $E(\lambda)$ όταν $\lambda \to +\infty$. Έχουμε

$$E(\lambda) = \frac{x_M \cdot y_N}{2} = \frac{(7\lambda - 3)^2}{2\lambda(\lambda - 1)} = \frac{49\lambda^2 - 42\lambda + 9}{2(\lambda^2 - \lambda)}.$$

Για ελάχιστο εμβαδόν, θέτουμε $E'(\lambda) = 0$. Άρα,

$$E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow -\frac{7\lambda^2 + 18\lambda - 9}{2(\lambda^2 - \lambda)^2} = 0 \Leftrightarrow 7\lambda^2 + 18\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 3)\left(\lambda - \frac{3}{7}\right) = 0.$$

Άρα,

$$E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ (δεκτή) } \text{ ή } \frac{3}{7} \text{ (απορρ. αφού πρέπει } \lambda \notin [0,1]) .$$

λ	$-\infty$		-3		0		$\frac{3}{7}$		1		$+\infty$
$E'(\lambda)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$E(\lambda)$		↘	min	↗	‖	↗	max	↘	‖	↘	

Από τον πίνακα προσήμων, και εφόσον αγνοούμε το διάστημα $[0,1]$, έπεται πως το $\lambda = -3$ δίνει ολικό ελάχιστο αν και μόνο αν

$$E(-3) < \lim_{\lambda \to \infty} E(\lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{49\lambda^2 - 42\lambda + 9}{2(\lambda^2 - \lambda)} = \frac{49}{2}.$$

Πράγματι, έχουμε

$$E(-3) = \frac{576}{24} = 24 < \frac{49}{2}.$$

Επομένως, το εμβαδόν είναι ελάχιστο όταν $\lambda = -3$, που δίνει $x_M = \frac{-21-3}{-3} = 8$ και $x_N = y_N = \frac{-21-3}{-3-1} = 6$. Άρα, όταν το εμβαδόν είναι ελάχιστο, τα σημεία M, N θα έχουν συντεταγμένες $M(8,0)$ και $N(6,6)$.

Τρίτος Τρόπος

Γνωρίζουμε από τον πρώτο τρόπο ότι

$$E(\alpha) = \frac{2\alpha^2}{\alpha - 3}, \quad \alpha > 3.$$

Θέτουμε $x = \frac{3}{\alpha}$ και $y = \frac{\alpha - 3}{\alpha}$. Τότε

$$1 = x + y \geqslant 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{\frac{3(\alpha - 3)}{\alpha^2}} = 2\sqrt{\frac{6}{E(\alpha)}} = \sqrt{\frac{24}{E(\alpha)}}.$$

Άρα $E(\alpha) \geqslant 24$ με την ισότητα να ισχύει όταν

$$x = y \implies \frac{3}{\alpha} = \frac{\alpha - 3}{\alpha} \implies \alpha = 6 \implies M(8,0) \text{ και } N(6,6).$$