Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία
Στασίνου 36, Γραφ. 102, Στρόβολος 2003, Λευκωσία
Τηλέφωνο: 357 – 22378101
cms@cms.org.cy, www.cms.org.cy

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2026

Μαθηματικα Κοινου Κορμου

Ημερομηνία: 26/06/2026

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ

ΜΕΡΟΣ Α′: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Α1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \left(12x^3 + 4x^2 - 8x + 3\right)\, \mathrm{d}x.$$

Λύση

Ολοκληρώνουμε όρο προς όρο:

$$\begin{aligned}\int (12x^3 + 4x^2 - 8x + 3)\, \mathrm{d}x &= \int 12x^3\, \mathrm{d}x + \int 4x^2\, \mathrm{d}x - \int 8x\, \mathrm{d}x + \int 3\, \mathrm{d}x \\ &= 3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 3x + c.\end{aligned}$$

Α2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 12x + 7$, $x \in \mathbb{R}$, ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Η πρώτη παράγωγος της f δίνεται από τον τύπο

$$f'(x) = 2x - 12 = 2(x - 6), \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία έχει ρίζα το $x = 6$. Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $f'(x)$:

x	$-\infty$		6		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		↘	min	↗	

Ισχύει λοιπόν ότι

- $f'(x) < 0$ για $x < 6$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 6]$ και
- $f'(x) > 0$ για $x > 6$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[6, +\infty)$.

Α3. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

$$P(A) = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{3}{8} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{7}{12}.$$

(α) Να υπολογίσετε τις πιο κάτω πιθανότητες:

(i) $P(A \cap B)$ **(1 μονάδα)**

(ii) $P(B - A)$ **(1 μονάδα)**

(iii) $P(B|A)$ **(2 μονάδες)**

(β) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. **(1 μονάδα)**

Λύση.

(α) (i)

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{7}{12} = \frac{1}{8}.$$

(ii)

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(iii)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{1/3} = \frac{3}{8}.$$

(β) Έχουμε

$$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$

Άρα αφού $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ τότε τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Εναλλακτικά: Αφού από το (α)(iii) έχουμε

$$P(B|A) = \frac{3}{8} = P(B),$$

τότε τα δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα.

Α4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. **(4 μονάδες)**

(β) Αν $\kappa < 0$, να βρείτε το πρόσημο του $f(\kappa)$. **(1 μονάδα)**

Λύση

(α) Έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 6x + 7$. Η διακρίνουσα είναι ίση με:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = 36 - 84 = -48 < 0.$$

Επειδή $\alpha = 3 > 0$, ισχύει ότι:

$$f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Επειδή $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η f δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

Σημείωση: Από τα πιο πάνω, θα μπορούσαμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και από αυτό να συμπεράνουμε ότι δεν παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

(β) Από τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης, για $\kappa < 0$ έχουμε

$$\kappa < 0 \implies f(\kappa) < f(0) = -1 < 0.$$

Δηλαδή ο $f(\kappa)$ είναι **αρνητικός αριθμός**.

Εναλλακτικά: Για $\kappa < 0$ έχουμε

$$f(\kappa) = \kappa^3 - 3\kappa^2 + 7\kappa - 1 < 0$$

αφού είναι άθροισμα αρνητικών αριθμών.

Α5. Δίνεται η λέξη **ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης. **(2 μονάδες)**

(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν με σύμφωνο και περιέχουν τη λέξη **ΚΛΗΡΟΣ**. **(3 μονάδες)**

Λύση

(α) Αναζητούμε το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της λέξης **ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ**. Κάθε αναγραμματισμός είναι μία επαναληπτική μετάθεση 10 γραμμάτων στα οποία έχουμε δύο (2) **Ο**, δύο (2) **Λ** και δύο (2) **Η**. Άρα το πλήθος όλων των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης ισούται με:

$$M_{10}^{\varepsilon} = \frac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453600.$$

(β) Αναζητούμε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, οι οποίοι περιέχουν τη λέξη **ΚΛΗΡΟΣ** και αρχίζουν με σύμφωνο. Θεωρούμε τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ ως ένα αντικείμενο. Δηλαδή θεωρούμε τα αντικείμενα:

(ΚΛΗΡΟΣ), Λ, Ω, Η, Ο

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **Περίπτωση 1** (Ο αναγραμματισμός αρχίζει με το γράμμα Λ):

  $$\Lambda _ _ _ _$$

  Στην περίπτωση αυτή, στις 4 κενές θέσεις μεταθέτουμε τα υπόλοιπα αντικείμενα (ΚΛΗΡΟΣ), Ω, Η, Ο. Άρα υπάρχουν:

  $$M_4 = 4! = 24 \text{ αναγραμματισμοί}$$

- **Περίπτωση 2** (Ο αναγραμματισμός αρχίζει με τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ, της οποίας το πρώτο γράμμα είναι σύμφωνο - το Κ):

  $$(\text{ΚΛΗΡΟΣ}) _ _ _ _$$

  Στην περίπτωση αυτή, στις 4 κενές θέσεις μεταθέτουμε τα γράμματα Λ, Ω, Η, Ο, άρα υπάρχουν:

  $$M_4 = 4! = 24 \text{ αναγραμματισμοί}$$

Σύμφωνα με την προσθετική αρχή, συνολικά υπάρχουν:

$$24 + 24 = 48 \text{ αναγραμματισμοί,}$$

οι οποίοι περιέχουν τη λέξη ΚΛΗΡΟΣ και αρχίζουν με σύμφωνο.

Α6. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 + 2\beta x - 5, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1$.

Λύση

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x = 2$ και η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = -1$. Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (ως πολυωνυμική), τα πιο πάνω συνεπάγονται ότι:

$$f'(2) = 0 \quad \text{και} \quad f''(-1) = 0$$

Έχουμε $f'(x) = 3\alpha x^2 - 6x + 2\beta$ και $f''(x) = 6\alpha x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως:

$$f'(2) = 0 \implies 3\alpha \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2\beta = 0 \implies 12\alpha + 2\beta = 12 \implies 6\alpha + \beta = 6 \qquad (1)$$

και

$$f''(-1) = 0 \implies 6\alpha \cdot (-1) - 6 = 0 \implies -6\alpha = 6 \implies \boldsymbol{\alpha = -1}$$

Αντικαθιστώντας το $\alpha = -1$ στην (1) παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} 6\alpha + \beta &= 6 \\ \alpha &= -1 \end{aligned}\right\} \implies -6 + \beta = 6 \implies \boldsymbol{\beta = 12}$$

Α7. Ένας κύλινδρος και ένας κώνος έχουν την ίδια ακτίνα βάσης. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι κατά $324\pi\,\text{cm}^3$ μεγαλύτερος από τον όγκο του κώνου. Το ύψος του κυλίνδρου είναι $8\,\text{cm}$ και το ύψος του κώνου είναι $12\,\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

(α) την ακτίνα της βάσης του κώνου, **(2 μονάδες)**

(β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου. **(3 μονάδες)**

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} V_{\text{κυλίνδρου}} = V_{\text{κώνου}} + 324\pi &\implies \pi R^2 \cdot 8 = \frac{\pi R^2 \cdot 12}{3} + 324\pi \\ &\implies 8\pi R^2 = 4\pi R^2 + 324\pi \\ &\implies 4\pi R^2 = 324\pi \\ &\implies R^2 = 81 \\ &\implies R = 9\ \text{cm. (Αφού } R > 0.) \end{aligned}$$

(β) Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\lambda^2 = R^2 + 12^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \implies \lambda = 15\,\text{cm. (Αφού } R > 0.)$$

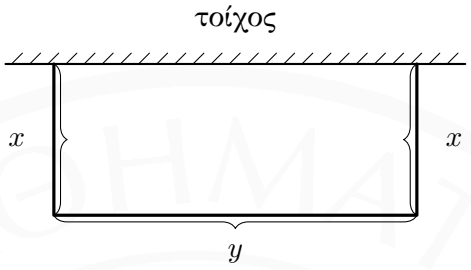
Συνεπώς το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι

$$E_{\text{κυρτ.}} = \pi R \lambda = \pi \cdot 9 \cdot 15 = 135\pi\,\text{cm}^2$$

Α8. Ένας κηπουρός θέλει να περιφράξει ένα χώρο σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου στην αυλή του, έτσι ώστε η μια πλευρά του να είναι ο εξωτερικός τοίχος της αποθήκης του σπιτιού του. Θα χρησιμοποιήσει δίκτυ μήκους $120\,\mathrm{m}$ για να περιφράξει τις άλλες τρεις πλευρές του. Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν του περιφραγμένου χώρου.

Λύση

Έστω ότι η μια διάσταση του ορθογωνίου είναι x και η άλλη y.



Τότε

$$2x + y = 120 \implies y = 120 - 2x.$$

Πρέπει $x > 0$ και $y > 0$ που δίνει $x < 60$. Αφού $E = xy$ τότε

$$E(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2, \quad x \in (0, 60).$$

Έχουμε $E'(x) = 120 - 4x$ άρα

$$E'(x) = 0 \implies 120 - 4x = 0 \implies x = 30.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $E'(x)$

x	0		30		60
E'		$+$	0	$-$	
E		↗	max	↘	

Άρα το εμβαδόν έχει ολικό μέγιστο το

$$E_{\max} = E(30) = 30 \cdot 60 = 1800\,\mathrm{m}^2.$$

Εναλλακτικά: Επειδή $E''(x) = -4 < 0$ για κάθε $x \in (0, 60)$ τότε στο $x = 30$ το εμβαδόν έχει ολικό μέγιστο.

Α9. Μια εταιρεία κυβερνοασφάλειας στη Λευκωσία σχεδιάζει ένα νέο σύστημα κλειδώματος. Ο κωδικός πρόσβασης για κάθε χρήστη αποτελείται από 6 διαφορετικούς χαρακτήρες, οι οποίοι επιλέγονται από το σύνολο των ψηφίων $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και το σύνολο των γραμμάτων $\{A, B, \Gamma, \Delta, E\}$.

Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί κωδικοί μπορούν να σχηματιστούν, αν ο κωδικός:

(α) περιέχει 4 ψηφία και 2 γράμματα,

(β) αρχίζει με 3 ψηφία ακολουθούμενα από 3 γράμματα.

Λύση

(α)

- Για να επιλέξουμε 4 από τα 7 ψηφία έχουμε $\binom{7}{4} = 35$ διαφορετικούς τρόπους.
- Για να επιλέξουμε 2 από τα 5 γράμματα έχουμε $\binom{5}{2} = 10$ διαφορετικούς τρόπους.

Άρα ο συνολικός αριθμός κωδικών που μπορούμε να φτιάξουμε με τον τρόπο αυτό είναι

$$\binom{7}{4}\binom{5}{2} M_6 = 35 \cdot 10 \cdot 6! = 35 \cdot 10 \cdot 720 = 252000 \text{ τρόποι.}$$

Εναλλακτικά: Επιλέγουμε 2 από 6 θέσεις για τα γράμματα. Στις υπόλοιπες 4 θέσεις θα τοποθετηθούν ψηφία. Άρα έχουμε

$$\binom{6}{2} \Delta_2^5 \Delta_4^7 = 15 \cdot 20 \cdot 840 = 252000.$$

(β) Έχουμε 3 θέσεις και μπορούμε να τοποθετήσουμε 7 ψηφία χωρίς επανάληψη άρα από την αρχή της απαρίθμησης αυτό γίνεται με

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210 \text{ τρόπους.}$$

Ακολούθως έχουμε 3 θέσεις και μπορούμε να τοποθετήσουμε 5 γράμματα χωρίς επανάληψη και άρα αυτό γίνεται με

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ τρόπους.}$$

Άρα συνολικά έχουμε

$$210 \cdot 60 = 12600 \text{ τρόπους.}$$

Εναλλακτικά: Για να επιλέξουμε 3 από τα 7 ψηφία και να τα τοποθετήσουμε στις 3 πρώτες θέσεις έχουμε

$$\Delta_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210 \text{ τρόπους.}$$

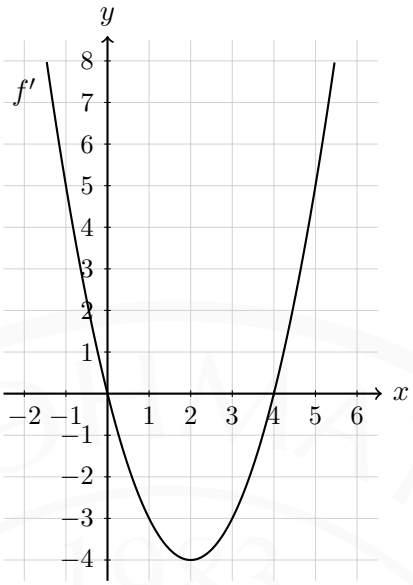
Για να επιλέξουμε 3 από τα 5 γράμματα και να τα τοποθετήσουμε στις 3 τελευταίες θέσεις έχουμε

$$\Delta_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60 \text{ τρόπους.}$$

Άρα ο συνολικός αριθμός κωδικών που μπορούμε να φτιάξουμε με τον τρόπο αυτό είναι

$$\Delta_3^7 \Delta_3^5 = 210 \cdot 60 = 12600.$$

Α10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου (f') μίας πολυωνυμικής συνάρτησης f.



(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. **(1 μονάδα)**

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να τα χαρακτηρίσετε. **(2 μονάδες)**

(γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα. **(1 μονάδα)**

(δ) Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$\int (g(x) + 6)\,\mathrm{d}x = f(x) + c.$$

Να βρείτε την τιμή του $g(2)$. **(1 μονάδα)**

Λύση

Θεωρούμε ότι η γραφική παράσταση της f' προεκτείνεται όπως υπονοείται στο σχήμα.

Από τη γραφική παράσταση κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	max	↘	min	↗	

(α) Από τον πίνακα μονοτονίας παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 4]$.

(β) Από τον πίνακα μονοτονίας παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο για $x = 0$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 4$.

(γ) Από τη γραφική παράσταση κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα κυρτότητας:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		∩	Σ.Κ.	∪	

Παρατηρούμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη) στο $(-\infty, 2]$ και στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή) στο $[2, +\infty)$. Στο $x = 2$, η συνάρτηση f αλλάζει κυρτότητα. Συνεπώς, στο $x = 2$ η γραφική της παράσταση παρουσιάζει σημείο καμπής.

(δ) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας ως προς x, έχουμε:

$$g(x) + 6 = f'(x) \implies g(x) = f'(x) - 6.$$

Αντικαθιστούμε το $x = 2$ για να πάρουμε

$$g(2) = f'(2) - 6$$

Από τη δοσμένη γραφική παράσταση γνωρίζουμε ότι $f'(2) = -4$. Κάνοντας την αντικατάσταση στην πιο πάνω ισότητα λαμβάνουμε:

$$g(2) = -4 - 6 = -10$$

Άρα, η ζητούμενη τιμή είναι $g(2) = -10$.

ΜΕΡΟΣ Β′: **Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

Β1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x.$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων. **(1,5 μονάδες)**

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:

(i) τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα, **(3 μονάδες)**

(ii) την κυρτότητα και τα σημεία καμπής, **(1,5 μονάδες)**

(iii) τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της. **(1 μονάδα)**

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(3 μονάδες)**

Λύση

(α) Η f ως πολυωνυμική συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων έχουμε:

- $x = 0 \implies y = 0$.
- Επειδή $f(x) = -x(x^2 - 6x + 9) = -x(x-3)^2$ τότε

$$y = 0 \implies -x(x-3)^2 = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = 3.$$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα $(0,0)$ και $(3,0)$.

(β) **(i)** Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο της f:

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x^2 - 4x + 3) = -3(x-3)(x-1), \quad x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \implies -3(x-3)(x-1) = 0 \implies x = 1 \text{ ή } x = 3$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας της συνάρτησης.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		↘	min	↗	max	↘	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,3]$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 = 1$ και τοπικό μέγιστο στο $x_2 = 3$ με αντίστοιχες τιμές $f(1) = -4$ και $f(3) = 0$.

(ii) Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f':

$$f''(x) = -6x + 12 = -6(x-2), \quad x \in \mathbb{R}$$

Έχουμε:

$$f''(x) = 0 \implies -6(x-2) = 0 \implies x = 2.$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα κυρτότητας.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	
f		∪	Σ.Κ.	∩	

Στο διάστημα $(-\infty, 2]$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτή) και στο διάστημα $[2, +\infty)$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω (κοίλη). Στο σημείο $(2, -2)$ η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής.

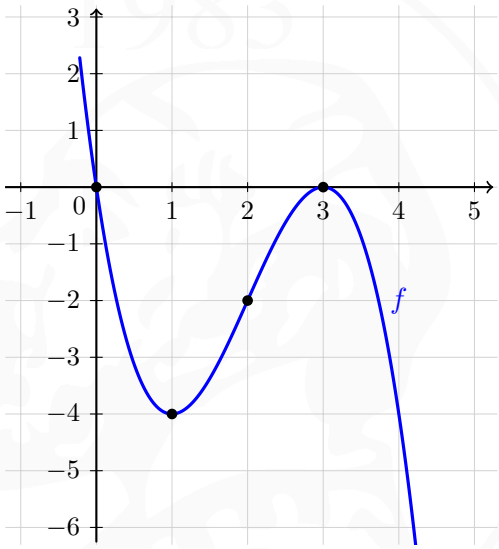
(iii) Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού, δηλαδή θα βρούμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = \lim_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^3 + 6x^2 - 9x) = \lim_{x\to-\infty} -x^3 = +\infty.$$

(γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω:



Β2. Ένα γεωργικό ινστιτούτο στην ελεύθερη περιοχή Αμμοχώστου μελέτησε τη σχέση ανάμεσα στον μέσο αριθμό ωρών καθημερινής ηλιοφάνειας κατά τη διάρκεια του ανοιξιάτικου μήνα ανάπτυξης και στην τελική ετήσια σοδειά πατάτας (σε τόνους ανά δεκάριο). Τα δεδομένα από 5 τυχαία επιλεγμένα αγροτεμάχια στα Κοκκινοχώρια καταγράφηκαν στον παρακάτω πίνακα:

Ώρες Ηλιοφάνειας (x)	6	7	9	9	9
Σοδειά σε Τόνους (y)	2	3	4	5	6

(α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ωρών ηλιοφάνειας $(\bar{x})$ και τη μέση τιμή των τόνων της σοδειάς $(\bar{y})$. **(2 μονάδες)**

(β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. **(2 μονάδες)**

(γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή συσχέτισης των δύο μεταβλητών. **(5 μονάδες)**

(δ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ των δύο μεταβλητών. **(1 μονάδα)**

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε τον πιο κάτω πίνακα

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
6	2	12	4	4
7	3	21	1	1
9	4	36	1	0
9	5	45	1	1
9	6	54	1	4
$\Sigma_x = 40$	$\Sigma_y = 20$	$\Sigma_{xy} = 168$	$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = 8$	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2 = 10$

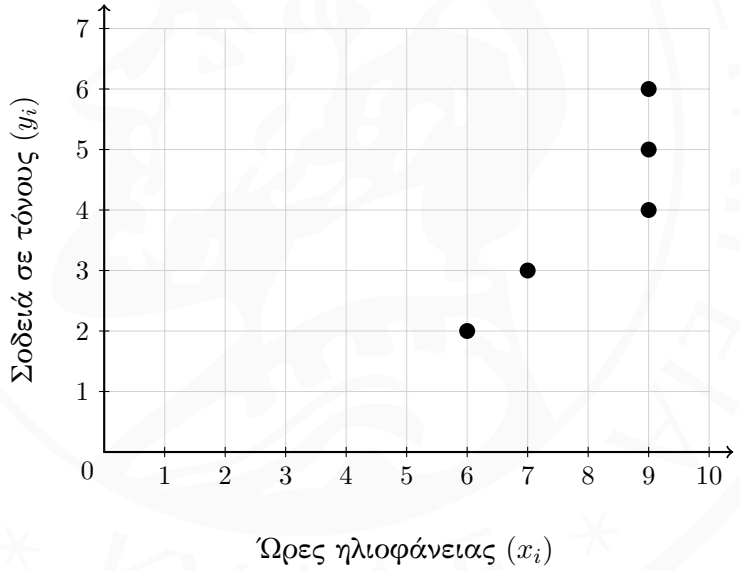
(α) Η μέση τιμή των ωρών ηλιοφάνειας είναι

$$\overline{x} = \frac{\Sigma_x}{\nu} = \frac{40}{5} = 8$$

και η μέση τιμή των τόνων της σοδειάς είναι

$$\bar{y} = \frac{\Sigma_y}{\nu} = \frac{20}{5} = 4.$$

(β) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται πιο κάτω:



(γ) Υπολογίζουμε πρώτα τα

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{8}{5}} \approx 1{,}265 \quad \text{και} \quad S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y_i - \bar{y})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{10}{5}} \approx 1{,}414$$

Ο συντελεστής συσχέτισης είναι

$$r = \frac{\Sigma_{xy} - \nu\overline{xy}}{\nu S_x S_y} \approx \frac{168 - 5 \cdot 8 \cdot 4}{5 \cdot 1{,}265 \cdot 1{,}414} \approx \frac{8}{8{,}944} \approx 0{,}89.$$

(δ) Παρατηρούμε ότι υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των ωρών ηλιοφάνειας και της σοδειάς.

Β3. Δίνονται τα ψηφία $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

(α) Να βρείτε πόσοι τετραψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα πιο πάνω ψηφία χωρίς επανάληψη ψηφίου. **(2 μονάδες)**

(β) Παίρνουμε τυχαία έναν από τους πιο πάνω τετραψήφιους αριθμούς. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

(i) Α: Να είναι περιττός. **(2 μονάδες)**

(ii) Β: Να μην περιέχει το ψηφίο 5. **(2 μονάδες)**

(iii) Γ: Να είναι άρτιος και να περιέχει το ψηφίο 5. **(4 μονάδες)**

Λύση

(α) Το πρώτο ψηφίο (των χιλιάδων) δεν μπορεί να είναι το 0, άρα υπάρχουν 6 επιλογές για την πρώτη θέση: $1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Για τη δεύτερη θέση απομένουν 6 ψηφία, για την τρίτη 5 και για την τέταρτη 4. Άρα το συνολικό πλήθος είναι:

$$6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 720.$$

Επομένως σχηματίζονται 720 τετραψήφιοι αριθμοί.

(β) Το δειγματικό σύνολο έχει 720 ισοπίθανα αποτελέσματα.

(i) Για να είναι, με αυτά τα δεδομένα, ένας τετραψήφιος αριθμός περιττός, το τελευταίο ψηφίο (των μονάδων) πρέπει να είναι ένα από τα $1, 3, 5$. Έχουμε 3 επιλογές για το τελευταίο ψηφίο, 5 επιλογές για το πρώτο ψηφίο (πρέπει να είναι διαφορετικό από το 0 και από το τελευταίο ψηφίο), 5 επιλογές για το δεύτερο και 4 επιλογές για το τρίτο.

Άρα οι περιττοί αριθμοί είναι:

$$\nu(A) = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 = 300.$$

Επομένως

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{300}{720} = \frac{5}{12}.$$

(ii) Επιτρέπεται η χρήση των ψηφίων $0, 1, 2, 3, 4, 6$.

Για την πρώτη θέση υπάρχουν 5 επιλογές (όλα εκτός του 0), για τη δεύτερη 5, για την τρίτη 4 και για την τέταρτη 3.

Άρα ο αριθμός των τετραψήφιων αριθμών που δεν περιέχουν το 5 είναι:

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300.$$

Επομένως:

$$P(B) = \frac{\nu(B)}{\nu(\Omega)} = \frac{300}{720} = \frac{5}{12}.$$

(iii) Για να είναι, με αυτά τα δεδομένα, ένας τετραψήφιος αριθμός άρτιος, το τελευταίο ψηφίο (των μονάδων) πρέπει να είναι ένα από τα $0, 2, 4, 6$.

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν το τελευταίο ψηφίο είναι το 0: Αν το πρώτο ψηφίο είναι το 5, έχουμε $5 \cdot 4 = 20$ επιλογές για τα άλλα δύο ψηφία. Ομοίως και αν το δεύτερο ή το τρίτο ψηφίο είναι το 5. Συνολικά έχουμε $20 + 20 + 20 = 60$ αριθμούς.

- Αν το τελευταίο ψηφίο είναι το 2: Αν το πρώτο ψηφίο είναι το 5, έχουμε $5 \cdot 4 = 20$ επιλογές για τα άλλα δύο ψηφία.

  Αν το δεύτερο ψηφίο είναι το 5, μας μένουν 4 επιλογές για το πρώτο ψηφίο (απαγορεύεται και το 0) και 4 για το τρίτο. Ομοίως και αν το τρίτο ψηφίο είναι το 5.

  Συνολικά έχουμε $20 + 16 + 16 = 52$ αριθμούς.

- Αν το τελευταίο ψηφίο είναι το 4 ή το 6: Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση έχουμε 52 αριθμούς σε κάθε περίπτωση.

Συνολικά έχουμε $\nu(\Gamma) = 60 + 52 + 52 + 52 = 216$ και

$$P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}.$$

Εναλλακτικά: Αφού από τους 720 αριθμούς οι 300 είναι περιττοί (το βρήκαμε στο ερώτημα (β)(i)), οι άρτιοι είναι $720 - 300 = 420$.

Επίσης, αν απαγορεύαμε εξ αρχής το ψηφίο 5 με παρόμοιο τρόπο όπως στα (α) και (β)(i) θα είχαμε

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$$

αριθμούς εκ των οποίων οι

$$2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96$$

θα ήταν περιττοί. Άρα έχουμε $300 - 96 = 204$ άρτιους που δεν περιέχουν το ψηφίο 5 και άρα $420 - 204 = 216$ άρτιους που περιέχουν το ψηφίο 5.

Εναλλακτικά: Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η:

$$P(\Gamma) = P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B).$$

Ισχύει ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Για τον υπολογισμό της $P(A \cap B)$ βρίσκουμε πρώτα

$$\nu(A \cap B) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 96$$

που είναι το πλήθος των περιττών που δεν περιέχουν το 5. (Όπως στην προηγούμενη εναλλακτική λύση.)

Συνεπώς

$$P(A \cap B) = \frac{96}{720} = \frac{2}{15} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} - \frac{2}{15} = \frac{7}{10}.$$

Άρα

$$P(\Gamma) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}.$$

Εναλλακτικά: Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- **Άρτιοι που περιέχουν το** 5 **και λήγουν σε** 0: Επιλέγουμε δύο ψηφία από τα $1, 2, 3, 4, 6$ και τα μεταθέτουμε με το 5:

$$\binom{5}{2} \cdot 3! \cdot 1 = 60 \text{ τετραψήφιοι.}$$

- **Άρτιοι που περιέχουν το 5 και λήγουν σε ένα από τα $2, 4, 6$ (3 επιλογές):**
  - Αν δεν περιέχουν το 0:
  $$\binom{4}{2} \cdot 3! \cdot 3 = 108 \text{ τετραψήφιοι.}$$
  - Αν περιέχουν το 0:
  $$\binom{2}{1}\binom{4}{1} \cdot M_2 \cdot 3 = 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 48 \text{ τετραψήφιοι.}$$
  (Επιλέγουμε μία από τη δεύτερη ή τρίτη θέση για το 0, ένα από τα υπόλοιπα 4 ψηφία και το μεταθέτουμε με το 5.)

Συνολικά λοιπόν έχουμε

$$60 + 48 + 108 = 216 \text{ τετραψήφιους.}$$

Άρα

$$P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{216}{720} = \frac{3}{10}.$$

Β4. Ο πληθυσμός ενός είδους ψαριών σε μια λίμνη δίνεται από τη συνάρτηση $P(t)$, όπου t είναι οι μήνες από την έναρξη μιας περιβαλλοντικής μελέτης διάρκειας 2 χρόνων. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$P'(t) = 2000 - 100t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 24.$$

Σε ένα χρόνο από την έναρξη της μελέτης, ο πληθυσμός των ψαριών στη λίμνη ήταν 31800.

(α) Να αποδείξετε ότι: $P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$. **(4 μονάδες)**

(β) Να υπολογίσετε τον μέγιστο πληθυσμό ψαριών, που είχε η λίμνη κατά τη διάρκεια της μελέτης. **(4 μονάδες)**

(γ) Σε πόσους μήνες από την έναρξη της έρευνας ο πληθυσμός στη λίμνη έγινε 30000 ψάρια. **(2 μονάδες)**

Λύση

(α) Έχουμε

$$P(t) = \int P'(t)\,\mathrm{d}t = \int (2000 - 100t)\,\mathrm{d}t = 2000t - 50t^2 + c.$$

Επειδή $P(12) = 31800$ έχουμε:

$$31800 = 2000 \cdot 12 - 50 \cdot 12^2 + c = 24000 - 7200 + c \implies c = 15000.$$

Άρα $P(t) = 2000t - 50t^2 + 15000$.

(β) Έχουμε $P'(t) = -100t + 2000$. Τότε

$$P'(t) = 0 \implies -100t + 2000 = 0 \implies 100t = 2000 \implies t = 20.$$

Φτιάχνουμε τον πίνακα προσήμου της P':

t	0		20		24
P'		$+$	0	$-$	
P		↗	max	↘	

Επομένως η $P(t)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 20]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[20, 24]$. Η $P(t)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή για $t = 20$ μήνες την

$$P(20) = 2000 \cdot 20 - 50 \cdot 20^2 + 15000 = 40000 - 20000 + 15000 = 35000.$$

(γ) Έχουμε

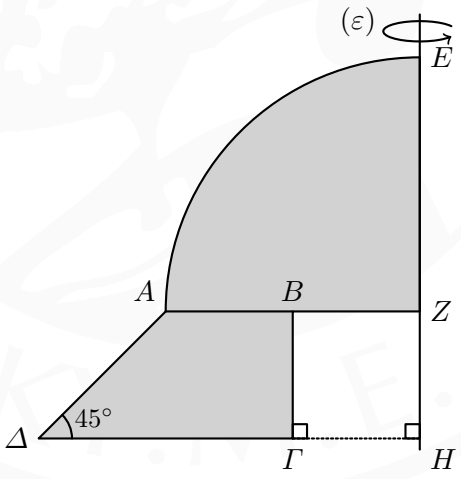
$$P(t) = 30000 \implies 2000t - 50t^2 + 15000 = 30000 \implies 50t^2 - 2000t + 15000 = 0.$$

Διαιρούμε με 50:

$$\begin{aligned} t^2 - 40t + 300 = 0 &\implies (t-30)(t-10) = 0 \\ &\implies t = 10 \text{ (δεκτό)} \quad \text{ή} \quad t = 30 \text{ (απορρίπτεται)} \end{aligned}$$

Επειδή $0 \leqslant t \leqslant 24$ τότε δεκτό είναι μόνο το $t = 10$ μήνες. Επομένως σε 10 μήνες ο πληθυσμός ήταν 30000 ψάρια.

Β5. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο. Τα σημεία A, B και Z είναι συνευθειακά. Με κέντρο το Z και ακτίνα ZA, γράφουμε τόξο AE. Δίνεται ότι $AB = BZ = B\Gamma$, $\Delta H = 12\,\text{cm}$, $AZ \perp (\varepsilon)$, $\Delta H \perp (\varepsilon)$ και $A\hat{\Delta}H = 45°$ (τα σημεία E, Z και H ανήκουν στην ευθεία (ε)). Το σκιασμένο σχήμα $(A\Delta\Gamma BZEA)$ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία (ε).



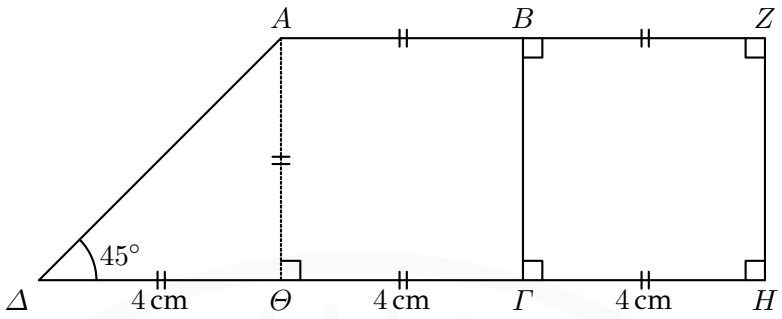
Να υπολογίσετε συναρτήσει του π:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και **(6 μονάδες)**

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται. **(4 μονάδες)**

Λύση

Από το σημείο A φέρουμε $A\Theta \perp \Delta\Gamma$. Το τρίγωνο $\Theta A\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές ($\widehat{\Delta} = \Delta\widehat{A}\Theta = 45^\circ$).



Επειδή $\Delta H = 12\,\text{cm}$, από τα δεδομένα έχουμε

$$AB = BZ = B\Gamma = A\Theta = \Delta\Theta = \Theta\Gamma = \Gamma H = 4\,\text{cm}.$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Theta A\Delta$ προκύπτει:

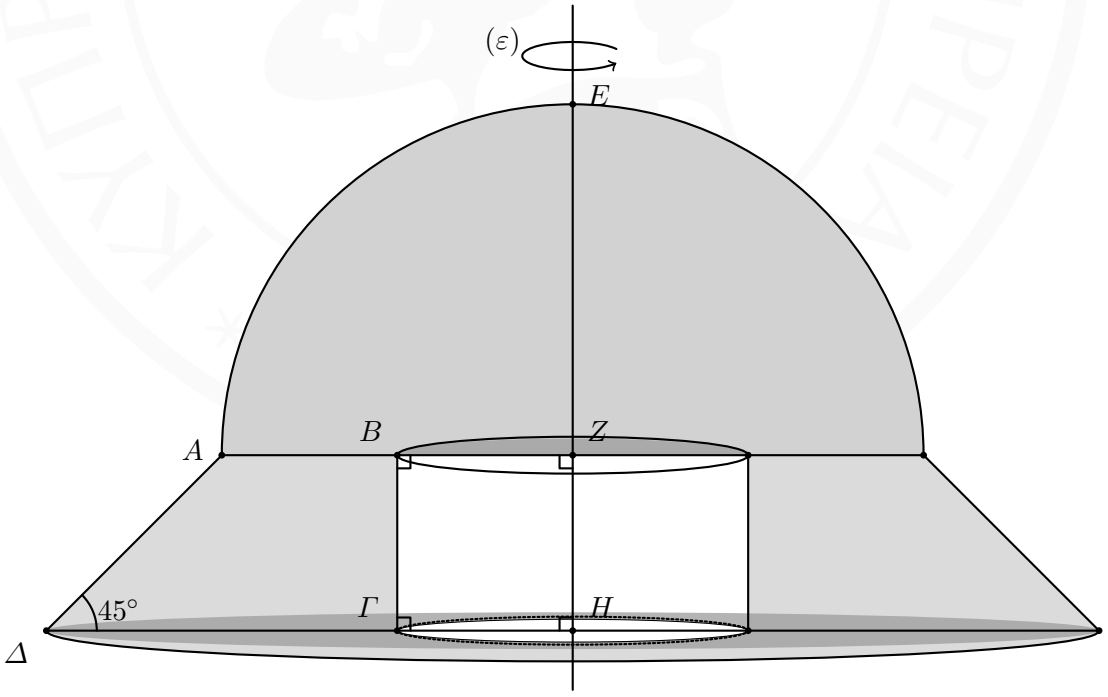
$$(A\Delta)^2 = (A\Theta)^2 + (\Delta\Theta)^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \;\Rightarrow\; A\Delta = \sqrt{32} \;\Rightarrow\; A\Delta = 4\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Κατά την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος $(A\Delta\Gamma BZEA)$ γύρω από την ευθεία (ε) παράγονται τα πιο κάτω στερεά:

Ημισφαίριο: $\rho = AZ = 8\,\text{cm}$ (ακτίνα)

Κύλινδρος: $r = BZ = 4\,\text{cm}$ (ακτίνα βάσης), $\upsilon = ZH = 4\,\text{cm}$ (ύψος)

Κόλουρος κώνος: $R = \Delta H = 12\,\text{cm}$ (ακτίνα μεγάλης βάσης), $\rho = AZ = 8\,\text{cm}$ (ακτίνα μικρής βάσης), $\upsilon = ZH = 4\,\text{cm}$ (ύψος), $\lambda = A\Delta = 4\sqrt{2}\,\text{cm}$ (γενέτειρα)



(α) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
E_{\text{ημισφαιρίου}} &= 2\pi\rho^2 = 2\pi\cdot 8^2 = 128\pi\,\text{cm}^2,\\
E_{\text{κυρτής κόλουρου κώνου}} &= \pi(R+\rho)\lambda = \pi(12+8)\cdot 4\sqrt{2} = 80\pi\sqrt{2}\,\text{cm}^2,\\
E_{\text{κυρτής κυλίνδρου}} &= 2\pi r\upsilon = 2\pi\cdot 4\cdot 4 = 32\pi\,\text{cm}^2,\\
E_{\text{δακτυλίου}} &= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\cdot 12^2 - \pi\cdot 4^2 = 128\pi\,\text{cm}^2,\\
E_{\text{βάσης κυλίνδρου}} &= \pi r^2 = \pi\cdot 4^2 = 16\pi\,\text{cm}^2.
\end{aligned}$$

Για το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού έχουμε:

$$\begin{aligned}
E_{\text{ολ}} &= E_{\text{ημισφ.}} + E_{\text{κυρτής κόλ. κών.}} + E_{\text{κυρτής κυλ.}} + E_{\text{δακτυλίου}} + E_{\text{βάσης κυλ.}}\\
&= 128\pi + 80\pi\sqrt{2} + 32\pi + 128\pi + 16\pi\\
&= 304\pi + 80\pi\sqrt{2}\\
&= 16(19+5\sqrt{2})\pi\,\text{cm}^2.
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned}
V_{\text{ημισφαιρίου}} &= \frac{2\pi\rho^3}{3} = \frac{2\pi\cdot 8^3}{3} = \frac{1024\pi}{3}\,\text{cm}^3,\\
V_{\text{κόλουρου κώνου}} &= \frac{\pi\upsilon}{3}\left(R^2+R\rho+\rho^2\right) = \frac{4\pi}{3}\left(12^2+12\cdot 8+8^2\right) = \frac{1216\pi}{3}\,\text{cm}^3,\\
V_{\text{κυλίνδρου}} &= \pi r^2\upsilon = \pi\cdot 4^2\cdot 4 = 64\pi\,\text{cm}^3.
\end{aligned}$$

Για τον όγκο του παραγόμενου στερεού έχουμε:

$$V = V_{\text{ημισφ.}} + V_{\text{κόλ. κών.}} - V_{\text{κυλ.}} = \frac{1024\pi}{3} + \frac{1216\pi}{3} - 64\pi = \frac{2048\pi}{3}\,\text{cm}^3.$$