



ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ

Ημερομηνία: 29/06/2023

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Δίνεται η λέξη: ΑΠΕΛΕΥΘΕΡΩΣΗ

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της. (2 μονάδες)

(β) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της, που ξεκινούν από Α και τελειώνουν σε Η. (3 μονάδες)

Λύση

(α) Έχουμε 3 Ε στην πιο πάνω λέξη. Επομένως, το πλήθος αναγραμματισμών είναι:

$$M_{12}^E = \frac{12!}{3!} = 79833600$$

(β) Έχουμε δύο «σταθερά» γράμματα, τα Α και Η. Επομένως, το πλήθος αναγραμματισμών είναι:

$$M_{10}^E = \frac{10!}{3!} = 604800$$

A2. (α) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int (4x^3 - x^2) \, dx$$

(2 μονάδες)

(β) Να βρείτε για ποιες τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int (\kappa - 2) x^\lambda \, dx = 2x^3 + c$$

(3 μονάδες)

Λύση

(α) Είναι:

$$\int (4x^3 - x^2) \, dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + c = x^4 - \frac{x^3}{3} + c$$

(β) Είναι:

$$\int (\kappa - 2) x^\lambda \, dx = \frac{(\kappa - 2) x^{\lambda+1}}{\lambda + 1} + c, \quad \lambda \neq -1$$

Επομένως:

$$\begin{cases} \lambda + 1 = 3 \\ \frac{\kappa - 2}{\lambda + 1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \frac{\kappa - 2}{3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \kappa = 8 \end{cases}$$

A3. Σε μια οφθαλμολογική κλινική νοσηλεύονται 52 άτομα που πάσχουν από καταρράκτη, 35 άτομα που πάσχουν από γλαύκωμα και 12 άτομα που πάσχουν και από τις δύο ασθένειες. Να βρείτε πόσοι ασθενείς σε αυτή την κλινική:

- (α) πάσχουν από τουλάχιστον μία από τις δύο ασθένειες
- (β) πάσχουν από καταρράκτη, αλλά όχι από γλαύκωμα

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

K : «Το άτομο να πάσχει από καταρράκτη.»

Γ : «Το άτομο να πάσχει από γλαύκωμα.»

Ισχύει ότι:

$$\nu(K) = 52, \quad \nu(\Gamma) = 35, \quad \nu(K \cap \Gamma) = 12$$

(α) Είναι:

$$\nu(K \cup \Gamma) = \nu(K) + \nu(\Gamma) - \nu(K \cap \Gamma) = 52 + 35 - 12 = 75$$

Άρα, έχουμε 75 άτομα που πάσχουν από τουλάχιστον μία από τις δύο ασθένειες.

(β) Είναι:

$$\nu(K \cap \Gamma') = \nu(K) - \nu(K \cap \Gamma) = 52 - 12 = 40$$

Άρα, έχουμε 40 άτομα που πάσχουν από καταρράκτη, αλλά όχι από γλαύκωμα.

A4. (α) Να δώσετε τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης. **(2 μονάδες)**

(β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης, να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = -2x + 7$, είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. **(3 μονάδες)**

Λύση

- (α) Μία συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, με Δ ένα διάστημα υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ονομάζεται γνησίως φθίνουσα στο Δ , αν, για οποιαδήποτε x_1, x_2 που ανήκουν στο Δ με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) > f(x_2)$.
- (β) Παρατηρούμε ότι για οποιουδήποτε δύο αριθμούς $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $x_1 < x_2$, ισχύει:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 > -2x_2 \Rightarrow -2x_1 + 7 > -2x_2 + 7 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

- A5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο υπερωριών, σε ώρες, 25 εργαζομένων ενός εργοστασίου, τον περασμένο μήνα.

Χρόνος υπερωριών (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αρ. εργαζομένων	3	8	6	4	2	2

Να υπολογίσετε τα τεταρτημόρια Q_1, Q_2, Q_3 , το ενδοτεταρτημοριακό εύρος IQR και το εύρος R των πιο πάνω παρατηρήσεων.

Λύση

Κατατάσσουμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, \boxed{2}, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5$$

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι $n = 25$ περιττός αριθμός. Η διάμεσος είναι η μεσαία παρατήρηση (13^{η}), που είναι το 2. Συνεπώς, το δεύτερο τεταρτημόριο είναι $Q_2 = 2$.

Το πρώτο μισό των παρατηρήσεων έχει πλήθος 12, άρτιο. Συνεπώς, το πρώτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_1 = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Το δεύτερο μισό των παρατηρήσεων έχει πλήθος 12, άρτιο. Συνεπώς, το τρίτο τεταρτημόριο είναι:

$$Q_3 = \frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

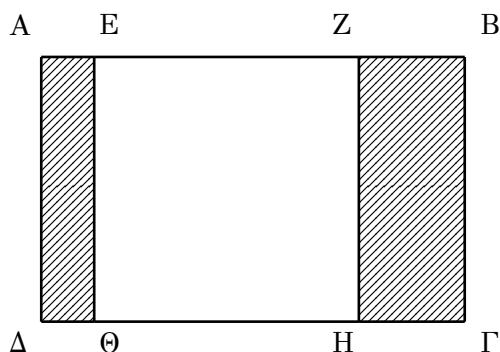
Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος είναι $IQR = Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$.

Τέλος, το εύρος των παρατηρήσεων είναι $R = 5 - 0 = 5$.

- A6. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$, με πλευρές $A\Delta = x$ και $AB = y$, το οποίο έχει σταθερή περίμετρο ίση με 16 m. Μέσα σε αυτό, βρίσκεται τετράγωνο $EZH\Theta$, του οποίου η πλευρά EZ βρίσκεται πάνω στην πλευρά AB και η πλευρά ΘH πάνω στην πλευρά $\Delta\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

(α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου δίνεται από τον τύπο $E(x) = -2x^2 + 8x$. (2 μονάδες)

(β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία μεγιστοποιείται το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν. (3 μονάδες)



Λύση

Από τα δεδομένα, έχουμε:

$$2x + 2y = 16 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x \quad (1)$$

(α) Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου $E(x)$ είναι:

$$\begin{aligned} E(x) &= E_{AB\Gamma\Delta} - E_{EZH\Theta} = xy - x^2 \stackrel{(1)}{=} x(8 - x) - x^2 \\ &= 8x - 2x^2 = -2x^2 + 8x, \quad x \in (0, 4) \end{aligned}$$

(β) Έχουμε:

$$E'(x) = -4x + 8$$

Έτσι:

$$E'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

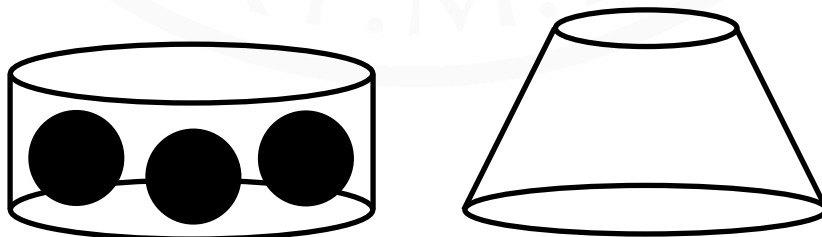
Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων για το E :

x	0	2	4	
$E'(x)$		+	0	-
E		max		

Από τον πιο πάνω πίνακα, παρατηρούμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν μεγιστοποιείται για $x = 2$.

- A7. Στο πιο κάτω σχήμα, υπάρχει ένα κυλινδρικό δοχείο, ανοικτό στο πάνω μέρος, με ακτίνα βάσης 8 cm και ύψος 6 cm. Μέσα σε αυτό υπάρχουν 3 σφαίρες ακτίνας 2 cm η κάθε μία. Δίπλα του υπάρχει ένα δοχείο, σε σχήμα κώλου κώνου, ανοικτό στο πάνω μέρος, γεμάτο με νερό. Το δοχείο έχει ακτίνα μεγάλης βάσης 8 cm, ακτίνα μικρής βάσης 4 cm και ύψος 8 cm. Αν αδειάσουμε το νερό που υπάρχει στο δοχείο σχήματος κώλου κώνου, μέσα στο κυλινδρικό δοχείο, να διερευνήσετε αν αυτό θα υπερχειλίσει ή όχι.

Να δικαιολογήσετε με μαθηματικούς υπολογισμούς την απάντησή σας.



Λύση

Ο όγκος του κυλινδρικού δοχείου είναι:

$$V_{\text{κυλίνδρου}} = \pi \cdot 8^2 \cdot 6 = 384\pi \text{ cm}^3$$

Ο όγκος κάθε σφαίρας είναι:

$$V_{\text{σφαίρας}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{32\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Ο όγκος του νερού είναι όσος και ο όγκος του κόλουρου κώνου. Άρα:

$$V_{\text{νερού}} = V_{\text{κόλουρου κώνου}} = \frac{\pi}{3} \cdot 8 \cdot (8^2 + 8 \cdot 4 + 4^2) = \frac{896\pi}{3} \text{ cm}^3$$

Έτσι, έχουμε:

$$V_{\text{νερού}} + 3V_{\text{σφαίρας}} = \frac{896\pi}{3} + 3 \cdot \frac{32\pi}{3} = \frac{992\pi}{3} \text{ cm}^3 < 384\pi \text{ cm}^3 = V_{\text{κυλίνδρου}}$$

Αφού $V_{\text{νερού}} + 3V_{\text{σφαίρας}} < V_{\text{κυλίνδρου}}$, το κυλινδρικό δοχείο δεν θα υπερχειλίζει.

A8. Για την πολυωνυμική συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f''(x) = 3, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητά της. **(1 μονάδα)**

(β) Αν ισχύει ότι $f'(1) = 8$, να βρείτε την τετμημένη του σημείου στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. **(2 μονάδες)**

(γ) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο $(0, 1)$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f . **(2 μονάδες)**

Λύση

(α) Αφού $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = 3 > 0$, τότε η συνάρτηση f είναι κυρτή (στρέφει τα κοίλα της πάνω) στο $\mathbb{R}$.

(β) Έχουμε διαδοχικά:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 3x + c_1$$

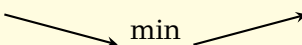
Όμως:

$$f'(1) = 8 \Rightarrow 3 \cdot 1 + c_1 = 8 \Rightarrow c_1 = 5$$

Άρα, $f'(x) = 3x + 5, x \in \mathbb{R}$. Είναι:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων για την f :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f			

Από τον πιο πάνω πίνακα προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο (ελάχιστο) στο σημείο με τετμημένη $x = -\frac{5}{3}$.

- (γ) Αφού η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $(0, 1)$, έχουμε ότι $f(0) = 1$. Τότε, από το (β) έχουμε διαδοχικά:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 3x + 5 \Rightarrow f(x) = \int (3x + 5) \, dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + c_2$$

Επειδή $f(0) = 1$, παίρνουμε ότι $0 + 0 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 1$. Συνεπώς:

$$f(x) = \frac{3x^2}{2} + 5x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

A9. Η θεατρική ομάδα ενός Λυκείου αποτελείται από 10 μαθητές και 6 μαθήτριες. Η θεατρική ομάδα πρόκειται να ανεβάσει επί σκηνής ένα θεατρικό έργο, το οποίο απαιτεί 6 διαφορετικούς αντρικούς και 2 διαφορετικούς γυναικείους ρόλους. Όλοι οι μαθητές και όλες οι μαθήτριες της θεατρικής ομάδας είναι διαθέσιμοι να αναλάβουν ρόλο.

- (α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικείους ρόλους; **(2 μονάδες)**
- (β) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η επιλογή των ηθοποιών, αν οι μαθητές υποδυθούν αντρικούς και οι μαθήτριες γυναικείους ρόλους, αλλά ένας συγκεκριμένος μαθητής, αν επιλεγεί, μπορεί να υποδυθεί μόνο ένα συγκεκριμένο αντρικό ρόλο; **(3 μονάδες)**

Λύση

- (α) Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151200 \text{ τρόπους}$$

για την ανάθεση των αντρικών ρόλων, ενώ για την ανάθεση των γυναικείων ρόλων έχουμε:

$$6 \cdot 5 = 30 \text{ τρόπους}$$

Επομένως, συνολικά έχουμε $151200 \cdot 30 = 4536000$ τρόπους.

Εναλλακτικά, έχουμε:

$$\Delta_6^{10} \cdot \Delta_2^6 = \frac{10!}{4!} \cdot \frac{6!}{4!} = 4536000$$

Εναλλακτικά, μπορούμε επίσης να δουλέψουμε και ως ακολούθως:

$$\binom{10}{6} \cdot 6! \cdot \binom{6}{2} \cdot 2! = \frac{10!}{4!6!} \cdot 6! \cdot \frac{6!}{2!4!} \cdot 2! = 4536000$$

- (β) • Ο συγκεκριμένος μαθητής επιλέγεται με:

$$(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) \cdot (6 \cdot 5) = 453600 \text{ τρόπους}$$

- Ο συγκεκριμένος μαθητής δεν επιλέγεται με:

$$(9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 5) = 1814400 \text{ τρόπους}$$

Άρα, συνολικά έχουμε $453600 + 1814400 = 2268000$ τρόπους.

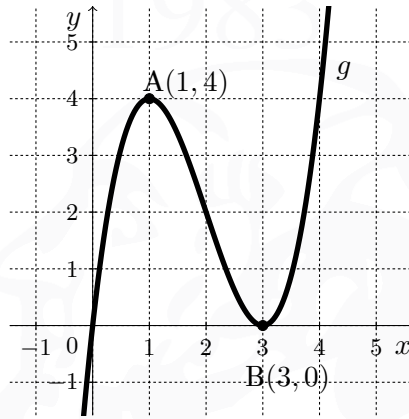
Εναλλακτικά, έχουμε:

$$\Delta_5^9 \cdot \Delta_2^6 + \Delta_6^9 \cdot \Delta_2^6 = 2268000$$

Εναλλακτικά, μπορούμε επίσης να δουλέψουμε και ως ακολούθως:

$$\binom{9}{5} \cdot 5! \cdot \binom{6}{2} \cdot 2! + \binom{9}{6} \cdot 6! \cdot \binom{6}{2} \cdot 2! = 2268000$$

A10. Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης g . Τα σημεία $A(1, 4)$ και $B(3, 0)$ είναι τοπικά ακρότατα της g .



- (α) Αν $\int F(x) \, dx = g(x) + c$, να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης F με τον άξονα των x , δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
- (β) Αν $\int g(x) \, dx = G'(x) + c$, να βρείτε την τιμή του x , για την οποία η συνάρτηση G παρουσιάζει σημεία καμπής, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

Λύση

- (α) Έχουμε ότι:

$$\int F(x) \, dx = g(x) + c \Rightarrow F(x) = g'(x)$$

Στα σημεία τομής της F με τον άξονα x έχουμε $F(x) = g'(x) = 0$. Επομένως, είναι τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της g παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Άρα, τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(1, 0)$ και $(3, 0)$.

- (β) Έχουμε ότι:

$$\int g(x) \, dx = G'(x) + c \Rightarrow g(x) = G''(x)$$

Στα σημεία που η G παρουσιάζει σημεία καμπής έχουμε $G''(x) = g(x) = 0$. Άρα, οι ζητούμενες τιμές του x είναι οι 0 και 3.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

(2 μονάδες)

(β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς:

i. τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα

(5 μονάδες)

ii. τη συμπεριφορά της στα άκρα του πεδίου ορισμού της

(1 μονάδα)

(γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(2 μονάδες)

Λύση

(α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική συνάρτηση.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.

• Αν $x = 0$, τότε $y = f(0) = 0$.

• Αν $y = f(x) = 0$, τότε:

$$\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x^3 - 12x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 12) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = \pm 2\sqrt{3}$$

Επομένως, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι τα $(0, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$ και $(2\sqrt{3}, 0)$.

(β) i. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = x^2 - 4$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow \text{max} \searrow \text{min} \nearrow$				

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

• Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 2]$.

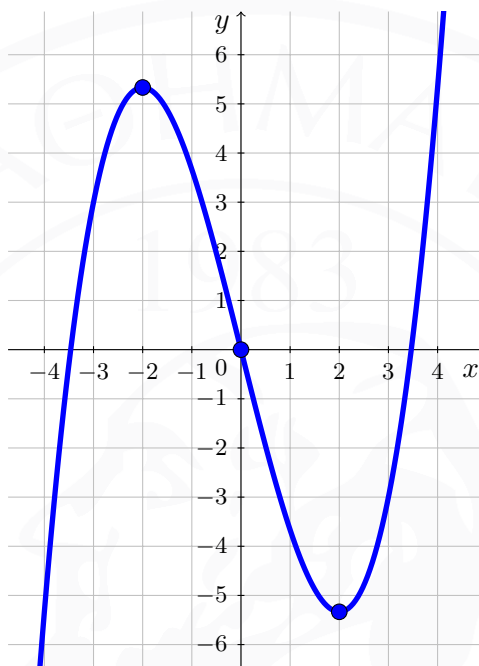
• Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -2$, το $f(-2) = \frac{16}{3}$, και τοπικό ελάχιστο για $x = 2$, το $f(2) = -\frac{16}{3}$.

- ii. Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού. Δηλαδή, βρίσκουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \rightarrow +\infty$ και $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$$

(γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται πιο κάτω.



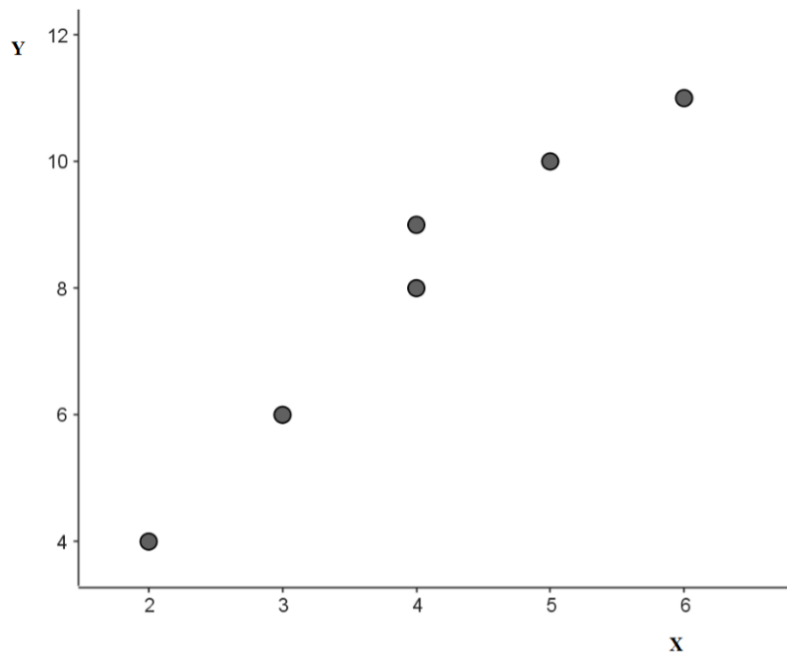
- B2. Στον πιο κάτω πίνακα, δίνεται η ηλικία 6 ηλεκτρονικών υπολογιστών, σε χρόνια, και ο αριθμός των επισκευών που έγιναν, για τον καθένα, μέχρι σήμερα.

Η.Υ.	Ηλικία Η.Υ. (x_i)	Αρ. επισκευών (y_i)
1	2	4
2	3	6
3	4	8
4	5	10
5	6	11
6	4	9

- (α) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα διασποράς. (3 μονάδες)
- (β) Να υπολογίσετε τον γραμμικό συντελεστή συσχέτισης. (6 μονάδες)
- (γ) Να χαρακτηρίσετε το είδος της συσχέτισης μεταξύ της ηλικίας των υπολογιστών και του αριθμού των επισκευών που έγιναν για τον καθένα μέχρι σήμερα. (1 μονάδα)

Λύση

(α) Το διάγραμμα διασποράς φαίνεται πιο κάτω.



(β) Έχουμε ότι

(x_i)	(y_i)	$(x_i y_i)$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$
2	4	8	4	16
3	6	18	1	4
4	8	32	0	0
5	10	50	1	4
6	11	66	4	9
4	9	36	0	1
$\Sigma x_i = 24$	$\Sigma y_i = 48$	$\Sigma x_i y_i = 210$	$\Sigma (x_i - \bar{X})^2 = 10$	$\Sigma (y_i - \bar{Y})^2 = 34$

όπου:

$$\bar{X} = \frac{1}{\nu} \Sigma x_i = \frac{24}{6} = 4 \quad \text{και} \quad \bar{Y} = \frac{1}{\nu} \Sigma y_i = \frac{48}{6} = 8$$

Επομένως,

$$S_x = \sqrt{\frac{\Sigma (x_i - \bar{X})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{10}{6}} = 1,29, \quad S_y = \sqrt{\frac{\Sigma (y_i - \bar{Y})^2}{\nu}} = \sqrt{\frac{34}{6}} = 2,38$$

και:

$$r = \frac{\Sigma xy - \nu \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\nu S_x S_y} = \frac{210 - 6 \cdot 4 \cdot 8}{6 \cdot 1,29 \cdot 2,38} = 0,976$$

(γ) Υπάρχει ισχυρή θετική γραμμική συσχέτιση, διότι ο συντελεστής συσχέτισης r είναι μεγαλύτερος του 0,7.

B3. Η συνάρτηση $\Pi(t)$ υπολογίζει, συναρτήσει του χρόνου t , σε χρόνια, τον πληθυσμό μιας χώρας, σε εκατομμύρια, για τα επόμενα 25 χρόνια. Ο ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, δίνεται από τη σχέση $\Pi'(t) = -\frac{1}{10}t + 2$, $t \in [0, 25]$.

(α) Αν σήμερα ($t = 0$) ο πληθυσμός της χώρας είναι 30 εκατομμύρια, να αποδείξετε ότι $\Pi(t) = -\frac{t^2}{20} + 2t + 30$, $t \in [0, 25]$.

(4 μονάδες)

(β) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός αναμένεται να είναι 45 εκατομμύρια;

(3 μονάδες)

(γ) Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός θα αρχίσει να μειώνεται;

(3 μονάδες)

Λύση

(α)) Αφού

$$\Pi'(t) = -\frac{1}{10}t + 2, t \in [0, 25],$$

τότε:

$$\Pi(t) = \int \left(-\frac{1}{10}t + 2 \right) dt = -\frac{1}{20}t^2 + 2t + c, t \in [0, 25]$$

Γνωρίζουμε ότι $\Pi(0) = 30$. Τότε

$$-\frac{1}{20} \cdot 0 + 2 \cdot 0 + c = 30 \Rightarrow c = 30$$

και:

$$\Pi(t) = -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 30, t \in [0, 25]$$

(β) Δίνεται ότι $\Pi(t) = 45$. Τότε:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{20}t^2 + 2t + 30 &= 45 \Rightarrow t^2 - 40t + 300 = 0 \Rightarrow (t - 30)(t - 10) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} t = 30, & \text{απορρίπτεται, γιατί } t \notin [0, 25] \\ t = 10, & \text{δεκτή, γιατί } t \in [0, 25] \end{cases} \end{aligned}$$

Έτσι, σε 10 χρόνια ο πληθυσμός αναμένεται να γίνει 45 εκατομμύρια.

(γ) Έχουμε:

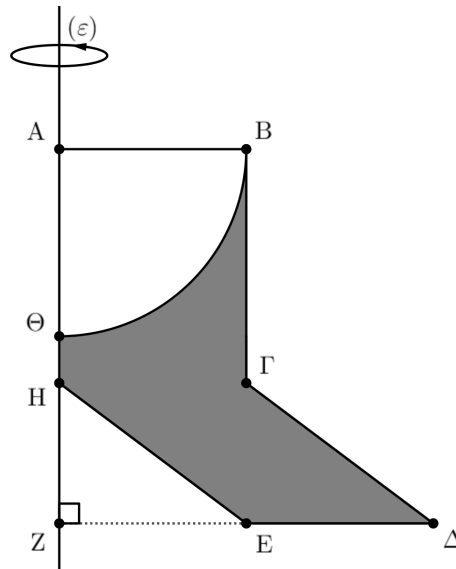
$$\Pi'(t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{10}t + 2 = 0 \Rightarrow t = 20$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μονοτονίας και ακροτάτων για την Π :

x	0	20	25
$\Pi'(x)$	+	0	-
Π	min	max	min

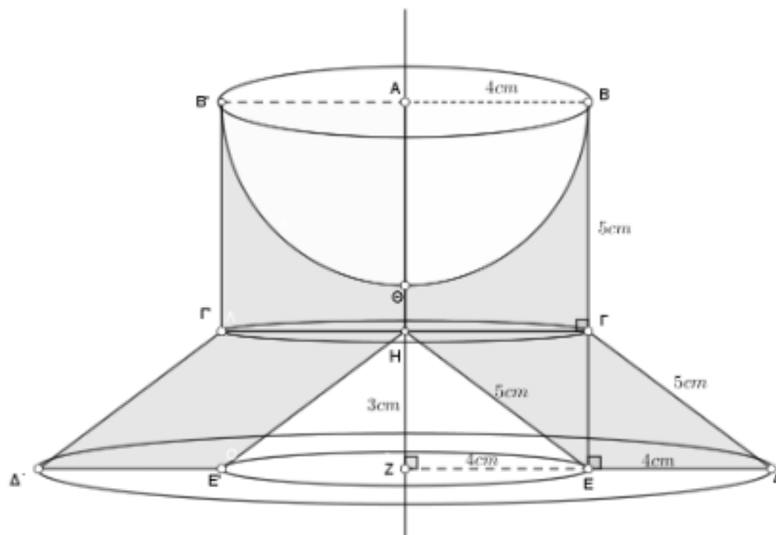
Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, στα 20 χρόνια ο πληθυσμός της χώρας μεγιστοποιείται. Επομένως, μόλις συμπληρωθούν τα 20 χρόνια, ο πληθυσμός θα αρχίσει να μειώνεται.

- B4.** Στο πιο κάτω σχήμα, το τετράπλευρο ΗΓΔΖ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με $H\Gamma \parallel Z\Delta$, $H\Gamma = 4\text{ cm}$, $Z\Delta = 8\text{ cm}$ και $ZH = 3\text{ cm}$. Το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με $B\Gamma = 5\text{ cm}$. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε το τόξο ΒΘ. Το σκιασμένο χωρίο ΒΓΔΕΗΘΒ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Λύση

Κατασκευάζουμε το στερεό.



Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΖΕ εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$(HZ)^2 + (ZE)^2 = (HE)^2 \Rightarrow 3^2 + 4^2 = (HE)^2 \Rightarrow (HE) = 5\text{ cm}$$

Ημισφαίριο	Κύλινδρος	Κόλουρος Κώνος	Κώνος
$R = 4 \text{ cm}$	$R = 4 \text{ cm}$	$R = 8 \text{ cm}$	$R = 4 \text{ cm}$
$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3$	$v = 5 \text{ cm}$	$\rho = 4 \text{ cm}$	$v = 3 \text{ cm}$
$= \frac{2}{3} \pi \cdot 4^3$	$V = \pi R^2 v$	$\lambda = 5 \text{ cm}$	$\lambda = 5 \text{ cm}$
$= \frac{128\pi}{3} \text{ cm}^3$	$= \pi 4^2 \cdot 5$	$v = 3 \text{ cm}$	$V = \frac{\pi R^2 v}{3}$
$E = \frac{1}{2} \cdot 4\pi R^2$	$= 80\pi \text{ cm}^3$	$V = \frac{\pi v}{3} (R^2 + R\rho + \rho^2)$	$= \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 3}{3}$
$= 2\pi \cdot 4^2$	$E_{\kappa} = 2\pi Rv$	$= \frac{\pi \cdot 3}{3} (8^2 + 4 \cdot 8 + 4^2)$	$= 16\pi \text{ cm}^3$
$= 32\pi \text{ cm}^2$	$= 2\pi \cdot 4 \cdot 5$	$= 112\pi \text{ cm}^3$	$E_{\kappa} = \pi R\lambda$
	$40\pi \text{ cm}^2$	$E_{\kappa} = \pi(R + \rho)\lambda$	$= \pi \cdot 4 \cdot 5$
		$= \pi(4 + 8) \cdot 5$	$= 20\pi \text{ cm}^2$
		$= 60\pi \text{ cm}^2$	
		$E_{\delta} = \pi \cdot 8^2 - \pi \cdot 4^2$	
		$= 48\pi \text{ cm}^2$	

Για τον όγκο του στερεού, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 V_{\text{στερεού}} &= V_{\text{Κυλίνδρου}} - V_{\text{Ημισφαίριου}} + V_{\text{Κόλουρου Κώνου}} - V_{\text{Κώνου}} \\
 &= 80\pi - \frac{128}{3}\pi + 112\pi - 16\pi = \frac{400}{3}\pi \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Τέλος, για το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
 E_{\text{ολικό}} &= E_{\text{Ημισφαίριου}} + E_{\text{Κυρτής Κυλίνδρου}} + E_{\text{Κυρτής Κόλ. Κώνου}} + E_{\text{Δακτυλίου}} + E_{\text{Κώνου}} \\
 &= 32\pi + 40\pi + 60\pi + 48\pi + 20\pi = 200\pi \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

B5. Ο προσωπικός μυστικός κωδικός εισόδου, ενός πελάτη μιας τράπεζας, στην ηλεκτρονική ιστοσελίδα της, είναι ένας εξαψήφιος αριθμός, που σχηματίζεται με τα ψηφία 0 έως 9. Τα ψηφία αυτά μπορούν να επαναλαμβάνονται και να βρίσκονται σε οποιαδήποτε από τις έξι θέσεις του αριθμού. Για παράδειγμα, οι αριθμοί 099824, 002377, 125760, 000000, 000023, 777766 μπορεί να είναι προσωπικοί κωδικοί εισόδου, πελατών της τράπεζας αυτής, στην ηλεκτρονική της ιστοσελίδα.

- (α) Να βρείτε πόσοι το πολύ προσωπικοί μυστικοί κωδικοί εισόδου μπορούν να σχηματιστούν. **(2 μονάδες)**
- (β) Αν ένας πελάτης ξέχασε τον ακριβή προσωπικό μυστικό κωδικό του, αλλά θυμάται ότι αρχίζει ή με το ψηφίο 5 ή με το ψηφίο 6 και είναι άρτιος, ποια είναι η πιθανότητα να σχηματίσει τον αριθμό αυτό με την πρώτη προσπάθεια; **(3 μονάδες)**
- (γ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου τα ψηφία είναι διαδοχικά και σε φθίνουσα διάταξη; **(3 μονάδες)**

- (δ) Ποια είναι η πιθανότητα ένας πελάτης της τράπεζας αυτής να έχει προσωπικό μυστικό κωδικό, του οποίου όλα τα ψηφία είναι διαφορετικά, περιέχει τα ψηφία 5 και 9 και το ψηφίο 9 προηγείται του ψηφίου 5; (2 μονάδες)

Λύση

- (α) Παρατηρούμε ότι για κάθε θέση του εξαψήφιου αριθμού υπάρχουν 10 επιλογές (ψηφία 0 έως 9). Επομένως, έχουμε $10^6 = 1000000$ διαφορετικούς κωδικούς.
- (β) Ορίζουμε ενδεχόμενο:

A : «Ο πελάτης σχηματίζει τον αριθμό του στην πρώτη προσπάθεια»

Ο πελάτης σχηματίζει τον προσωπικό του κωδικό μόνο με έναν τρόπο. Έτσι, $\nu(A) = 1$. Τώρα, για τις δυνατές περιπτώσεις έχουμε ότι για το πρώτο ψηφίο υπάρχουν 2 επιλογές, τα ψηφία 5 ή 6, για το τελευταίο ψηφίο 5 επιλογές, τα ψηφία 0, 2, 4, 6, 8 και για τα υπόλοιπα ψηφία 10 επιλογές. Άρα, σχηματίζονται $2 \cdot 5 \cdot 10^4 = 10^5 = 100000$ κωδικοί. Τελικά:

$$P(A) = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000}$$

- (γ) Ορίζουμε ενδεχόμενο:

B : «Κωδικός με διαδοχικά ψηφία και σε φθίνουσα διάταξη.»

Για το πρώτο ψηφίο υπάρχουν 5 επιλογές, τα ψηφία 9, 8, 7, 6, 5 και για τα υπόλοιπα ψηφία μια μόνο επιλογή. Έτσι, $\nu(B) = 5 \cdot 1^5 = 5$ και:

$$P(B) = \frac{\nu(A)}{\nu(\Omega)} = \frac{5}{10^6} = \frac{1}{200000}$$

- (δ) Ορίζουμε ενδεχόμενο:

Γ : «Κωδικός με διαφορετικά ψηφία, περιέχει τα ψηφία 5 και 9 και το 9 προηγείται του 5.»

Πρώτα, θα γίνει η επιλογή των 2 θέσεων για να τοποθετηθεί το 9 και μετά το 5, που είναι:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = 15 \text{ τρόποι}$$

Στη συνέχεια, θα τοποθετηθούν τα άλλα 4 ψηφία, που είναι:

$$\Delta_4^8 = \frac{8!}{(8-4)!} = 1680 \text{ τρόποι}$$

Έτσι, $\nu(\Gamma) = 15 \cdot 1680 = 25200$ και:

$$P(\Gamma) = \frac{\nu(\Gamma)}{\nu(\Omega)} = \frac{25200}{10^6} = \frac{252}{10000} = \frac{63}{2500}$$