

Η σημασία του Πίνακα Προδιαγραφών (ΠΠ) στα Εξεταστικά Δοκίμια

Δρ. Χρυσούλα Χατζηχρίστου (ΕΜΕ Μαθηματικών)

Με αφορμή μιας συνεδρίασης στο ΥΠΑΝ για τις Παγκύπριες Εξετάσεις (ΠΕ) και την σημασία του ΠΠ, ο καλεσμένος ομιλητής Δρ. Λαμπριανού, σε αναφορά μεταξύ άλλων στον ΠΠ, «**ως καλό συγκριτικό εργαλείο**» μου ανακάλεσε, μια παρουσίαση από το Διεθνές Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας Μακεδονίας το 2021 (International Seminar of Mahts Week), στην οποία ανέπτυξα τη σημασία του ΠΠ, τόσο στην οργάνωση και την κατασκευή ενός εξεταστικού δοκιμίου, υψίστης σημασίας, όσο και στην χρήση του ΠΠ, ως συγκριτικό εργαλείο. Ανέπτυξα σε αυτήν ένα παράδειγμα χρήσης του ΠΠ, ως συγκριτικό εργαλείο μεταξύ των σχολικών χρόνων 2017-18 και 2018-19, των εξεταστικών δοκιμίων Μαθηματικών της Γ κοινού κορμού, στις Παγκύπριες Εξετάσεις. Θεωρώ είναι πολύ σημαντικό να την παραθέσω σχεδόν αυτούσια, παραθέτοντας την στατιστική Ανάλυση (rash model) και τα λάθη των μαθητών/τριων.

Η εργασία αναφερόταν εν συντομία στο ρόλο που επιτέλεσε το Ενιαίο Λύκειο (ΕΛ), στο χώρο της Κυπριακής εκπαίδευσης, ακολουθεί μια συνοπτική αναδρομή στην Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση (ΕΜ), που αφορά στα Μαθηματικά της Μέσης Γενικής Εκπαίδευσης και τέλος στην σημασία του ΠΠ. Εδώ θα αναφερθώ μόνο στη σημασία που αφορά στον ΠΠ, μέσω της στατιστικής ανάλυσης με τη βοήθεια του εργαλείου (rash model) ως σημαντικό στατιστικό βοήθημα διάγνωσης της δυσκολίας των έργων και ανακατάταξης αυτών στον ΠΠ.

1. Πίνακας προδιαγραφών (ΠΠ)

Στην οργάνωση και την κατασκευή κάθε διαγνωστικού δοκιμίου σημαντικό είναι να αξιολογούμε όλους τους στόχους που θέσαμε στο πλαίσιο του μαθήματος, πόσο μάλλον σε δοκίμια υψίστης σημασίας όπως οι (ΠΕ) που καθορίζουν το μέλλον των μαθητών μας. Με το Ενιαίο Λύκειο (2005-2015) οι (ΠΕΑ) απόλυσης και πρόσβασης (ΠΕΠ) στην Γ' τάξη, ήταν κοινές στο Κυπριακό Εκπαιδευτικό Σύστημα. Τη σχολική χρονιά (2017-18), οι (ΠΕ) των Μαθηματικών Γ' Λυκείου κοινού κορμού Κύπρου και Ελλάδος, ήταν μόνο πρόσβασης και όχι απόλυσης. Για πρώτη φορά, το 2017-18 τα Μαθηματικά κοινού κορμού **δεν** ήταν εξεταζόμενο μάθημα για προαγωγή ή απόλυση, από την Βκκ στη Γκκ τάξη αντίστοιχα. Με την Εκπαιδευτική Μεταρρύθμιση (ΕΜ) οι διδακτικές περίοδοι (ΔΠ) των Μαθηματικών στην Γκκ αυξήθηκαν κατά μια (ΔΠ), την εβδομάδα, σε 3 από 2 (ΔΠ) όπως επικρατούσε με το (ΕΛ). Το γεγονός ότι το μάθημα ήταν μόνο πρόσβασης, για την εισαγωγή στα Ανώτερα και Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα (ΑΑΕΙ) σήμερα ΑΕΙ, το καθιστούσε σημαντικό και συνάμα επικίνδυνο στην οργάνωση και κατασκευή του συγκεκριμένου δοκιμίου. Ο λόγος πολύ απλός, επειδή ακριβώς, αφορούσε ύλη των Νέων Αναλυτικών Προγραμμάτων (ΝΑΠ), με την (ΕΜ), όπου εισήγαγε τους Δείκτες Επιτυχίας και Επάρκειας (ΔΕΕ), οι οποίοι διδάχτηκαν για πρώτη φορά, με νέα διδακτικά εγχειρίδια και οδηγίες σε εντελώς διαφορετική φιλοσοφία, από τα αναλυτικά που προϋπήρχαν, τόσο σε περιεχόμενο όσο και σε διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης.

Συνεπώς, έπρεπε να καθοριστούν τα σαφή κριτήρια και οι εμφάσεις που θα δίνονταν σε κάθε στόχο στο εξεταστικό δοκίμιο. Επιβαλλόταν δηλαδή, **πριν** την κατασκευή του εξεταστικού δοκιμίου, η **κατασκευή του Πίνακα Προδιαγραφών (ΠΠ)** [10] με πλήρη αιτιολόγηση. Ο (ΠΠ)

μας βοηθά να καταγράψουμε τόσο τις έννοιες που αξιολογούμε όσο και το επίπεδο στο οποίο θα γίνει η αξιολόγηση, καθορίζοντας έτσι το σκοπό και την έμφαση του δοκιμίου, συσχετίζοντας παράλληλα τον (ΠΠ), με τους διδακτικούς στόχους.

Το σύνολο των διδακτικών στόχων (δηλαδή οι πέντε ενότητες και οι υποενότητες του (ΑΠ) που παρουσιάζονται στην κατακόρυφη στήλη του Πίνακα 1) λήφθηκαν υπόψη στον Σχεδιασμό του εξεταστικού δοκιμίου και τις δύο σχολικές χρονιές (2017-18 και 2018-19). Συγκεκριμένα οι πέντε ενότητες αποτελούσαν: (1) Εφαρμογές διαφορικού λογισμού, (2) Αόριστο ολοκλήρωμα (Πολυωνυμικής μορφής), (3) Συνδυαστική-Πιθανότητες, (4) Στατιστική και (5) Στερεομετρία. Σύνολο 75 (ΔΠ) των 45-λεπτών, συμπεριλαμβανομένου των 3 (ΔΠ) για επανάληψη.

Πιο κάτω, παρουσιάζουμε μια σύγκριση μεταξύ των δύο Πινάκων Προδιαγραφών των εξεταστικών δοκιμίων των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου κκ. Από τον ΠΠ φαίνεται η κατανομή των ασκήσεων, για τις δύο *συνεχόμενες σχολικές χρονιές*, στην οποία έγινε *αναδιάταξη* των ασκήσεων, σύμφωνα πάντα με την βαρύτητα του γνωστικού αντικειμένου που εξεταζόταν την συγκεκριμένη σχολική χρονιά (2018-19), συγκριτικά πάντα με τα αποτελέσματα της προηγούμενης χρονιάς (2017-18).

Η αναδιάταξη των ασκήσεων του εξεταστικού δοκιμίου του 2018-2019 (που παρουσιάζεται στον Πίνακα 1) έγινε για να ελεγχτεί η γνώση πίσω από κάθε έννοια που εξεταζόταν, με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης του εξεταστικού δοκιμίου της προηγούμενης εξεταστικής (2017-2018). Όπως φαίνεται στον **Πίνακα 1** το εξεταστικό δοκίμιο 2017-18 (**κόκκινο χρώμα**) άρχισε με μια απλή άσκηση ολοκληρώματος, ενώ το εξεταστικό δοκίμιο του 2018-19 (**κίτρινο χρώμα**) άρχισε με μια άσκηση συσχέτισης δύο μεταβλητών.

Πίνακας 1: Σύγκριση Πινάκων Προδιαγραφών (ΠΠ) Εξεταστικών Δοκιμίων Παγκυπρίων Εξετάσεων Μαθηματικών κοινού κορμού (2017-18) & (2018-19)

Α/Α	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΟΙΝΟΥ ΚΟΡΜΟΥ Γ' ΤΑΞΗ	ΔΠ	Μονάδες/Σύνολο	Α' Μέρος	Β' Μέρος	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4	B5	
						5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10	
1	ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ	18	20.0	20	10	10															
	Μονοτονία – Τοπικά ακρότατα συνάρτησης (Ορισμοί)											5									
	Μονοτονία – Τοπικά ακρότατα συνάρτησης (Θεώρημα)										5						5				
	Κυρτότητα – Σημεία καμψής συνάρτησης								5	5											
	Μελέτη συνάρτησης – Γραφική παράσταση συνάρτησης																10		10		
	Προβλήματα																	10		10	
2	ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ (ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ)	12	16.7	20	10	10															
	Εισαγωγή																				
	Κανόνες ολοκλήρωσης						5	5													
	Εφαρμογές αόριστων ολοκληρωμάτων													5	5						
3	ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ – ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ	20	27.8	30	20	10															
	Εισαγωγή στα σύνολα																				
	Αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού								5												
	Εισαγωγή στη συνδυαστική - Αρχή απαρίθμησης							5													
	Μεταθέσεις (απλές, κυκλικές, επαναληπτικές)										5		5						5		
	Διατάξεις (απλές, επαναληπτικές)																				
	Συνδυασμοί											5									
	Έννοια της πιθανότητας									5									5		
	Πιθανότητες συνδυασμένων ενδεχομένων													5						10	
4	ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	10	13.9	15	5	10															
	Επανάληψη																				
	Τεταρτημόρια-Ενδοτεταρτημοριακό εύρος									5								5			
	Συσχέτιση δύο μεταβλητών και συντελεστής συσχέτισης						5		5								10				
5	ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ	12	16.7	15	5	10															
	Στερεά από περιστροφή (Κύλινδρος, Κώνος, Κόλουρος κ)												5		5						
	Περιστροφή σχημάτων γύρω από άξονα															10				10	
				100	50	50															
	Σύνολο	72	100				A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	B1	B2	B3	B4	B5

Σημαντικό στην οργάνωση του (ΠΠ) ήταν να προαποφασιστεί η έμφαση που έπρεπε να δοθεί στον καθένα από αυτούς τους πέντε βασικούς στόχους/ενότητες του (ΑΠ) της Γκκ. Αν αυτό δεν λαμβανόταν υπόψη τότε υπήρχε μεγάλη πιθανότητα να δοθεί μεγαλύτερη έμφαση σε μερικούς (ΔΕΕ), μιας ενότητας και να αγνοηθούν άλλοι. Επιπλέον, ο (ΠΠ) μας δίνει πληροφορίες για τις ερωτήσεις και τις δραστηριότητες που θα συμπεριληφθούν σε κάθε ενότητα, καθώς και για το γνωστικό επίπεδο δεξιοτήτων: **Γνώση (Γ), Κατανόηση (Κ), Εφαρμογή (Ε), Ανάλυση-Σύνθεση (Α/Σ)**, των ερωτήσεων, ανά ενότητα και συνολικά. Άρα, ο αριθμός των διδακτικών περιόδων (ΔΠ) που διατέθηκαν σε κάθε (ΔΕΕ), ήταν καθοριστικός παράγοντας, για την λήψη απόφασης, στην έμφαση που έπρεπε να δοθεί σε κάθε ενότητα/στόχο, δηλαδή, καθόρισε το ποσοστό συμβολής της κάθε ενότητας και συνεπώς, τον αριθμό των ασκήσεων, σε κάθε κατηγορία/επίπεδο γνώσης από την γνωστική ταξινόμια (Bloom taxonomy). *Τα πιο πάνω καθορίζουν: 1) τη σημασία που αποδίδεται σε κάθε στόχο (ΔΕΕ) και 2) την προσπάθεια που καταβλήθηκε για την επίτευξή του (δηλ. την έμφαση που δόθηκε στη διδασκαλία του κάθε στόχου).* Έτσι, ο (ΠΠ) είναι **δύο** διαστάσεων. Στη μία διάσταση (κατακόρυφα) γράφονται **οι στόχοι/υποενότητες της ύλης** που θα αξιολογηθούν και στην άλλη διάσταση (οριζόντια) **τα επίπεδα γνωστικών δεξιοτήτων**. Με βάση αυτό τον πίνακα (ΠΠ), καταχωρήθηκε η κάθε άσκηση του εξεταστικού δοκιμίου και στη συνέχεια είχε ελεγχθεί η αντιπροσωπευτικότητα του δοκιμίου, αλλά και η σχέση του με τους σκοπούς της διδασκαλίας του μαθήματος, εξασφαλίζοντας έτσι, **την εγκυρότητα του περιεχομένου του εξεταστικού δοκιμίου**.

Συγκεκριμένα, τα δοκίμια [7], αποτελούνται από δύο ισόβαθμα μέρη (Α' και Β' μέρος), με δέκα έργα (A1, A2...A10) στο Α' μέρος (ποσοστό 50%) και πέντε (B1,...B5) στο Β' μέρος (ποσοστό 50%). Συνήθως, οι τέσσερις πρώτες ασκήσεις/έργα του Α' μέρους αφορούσαν καθαρά **Γνώση** (ποσοστό 20% του εξεταστικού δοκιμίου), οι A5, A6 καθώς και η πρώτη του Β' μέρους αφορούσαν **Κατανόηση** (20%), οι A7, A8, B2, B3 και B4 αφορούσαν **Εφαρμογή** (40%) και οι A9, A10, B5 αφορούσαν **Ανάλυση-Σύνθεση** (Α-Σ) (ποσοστό 20% του εξεταστικού δοκιμίου). Συνολικά κατανεμήθηκαν ποσοστό από 20% στα δύο άκρα του δοκιμίου (Γ και Α/Σ αντίστοιχα) με πολύ απλά και πολύ δύσκολα έργα αντίστοιχα. Επίσης, κατανεμήθηκε ποσοστό συνολικά 40% στην Γνώση και Κατανόηση (από 20% αντίστοιχα) και ποσοστό 40% στην Εφαρμογή. Γενικά, η κατανομή με ποσοστό (20%-20%-40%-20%) αντίστοιχα, στην γνωστική ταξινόμια (Γ-Κ-Ε-Α/Σ), χαρακτηρίζεται αξιόπιστη (**Πίνακας 3**: student reliability=0,98, item reliability=0,93), με μεγάλο βαθμό εσωτερικής συνοχής, ιδανικό για εξετάσεις υψίστης σημασίας όπως οι ΠΕ, ως δοκίμιο πρόσβασης. Παράλληλα, εξυπηρετούσε και τις ανάγκες μαθητών, χωρίς ιδιαίτερη κλίση στα Μαθηματικά. Έτσι, τους έδωσε την ευκαιρία να αποδώσουν τα μέγιστα, τόσο στο Α' όσο και στο Β' μέρος, ειδικά στα κατώτερα γνωστικά επίπεδα (Γ-Κ) (lower order thinking) της ταξινόμιας. Τέλος, το δοκίμιο κατασκευάστηκε με βάση των (ΠΠ) και τοποθετήθηκαν σε κάθε κελί οι αντίστοιχες ασκήσεις/έργα από το (ΑΠ) των Μαθηματικών που διδάχτηκαν στη Γκκ.

3 Στατιστική ανάλυση (Partial Credit Model) και Ερμηνεία

Το δοκίμιο του 2018-19 (βλέπε Παράρτημα Α) δόθηκε σε 2137 μαθητές της Γ΄ Λυκείου και αποτελείται από δέκα ισόβαθμα έργα στο Μέρος Α΄ (Α1-Α10) και πέντε Μέρος Β΄(Β1-Β5). Τα έργα στο Μέρος Α΄ βαθμολογούνταν με 5 μονάδες το καθένα και τα έργα του δεύτερου μέρους με 10 το καθένα.

Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το Partial Credit Model (από την οικογένεια των μοντέλων της Item Response Theory (IRT)). Τα μοντέλα αυτά υπολογίζουν δύο σετ παραμέτρων: ένα για κάθε έργο, το οποίο δείχνει την δυσκολία του (item difficulty-thresholds) και ένα για κάθε εξεταζόμενο το οποίο δείχνει την ικανότητα του (student ability) . Το μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε μας επιτρέπει να δώσουμε μονάδες για μερικώς ορθή απάντηση.

Οι απαντήσεις των μαθητών στρογγυλοποιήθηκαν σε ακεραίους και στη συνέχεια κωδικοποιήθηκαν ως εξής:

Πίνακας 2

Έργα Α1-Α10	Μονάδες	Recoded Values Νέοι κωδικοί
	0	0
	1,2	1
	3,4	2
	5	3
Έργα Β1-Β5	Μονάδες	Recoded Values Νέοι κωδικοί
	0	0
	1,2,3,4	1
	5	2
	6,7,8	3
	9,10	4

Το μοντέλο PCM δίνει 3 παραμέτρους (όταν υπάρχουν 4 κατηγορίες στην απάντηση) και η τιμή της κάθε παραμέτρου (threshold) είναι το σημείο πάνω στην κλίμακα (Latent Trait) το οποίο δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα να πετύχεις το συγκεκριμένο βήμα από το προηγούμενο.

Για ευκολία στην ανάλυση και στην ερμηνεία των αποτελεσμάτων καταλήξαμε με 3 παραμέτρους (thresholds) για κάθε άσκηση του Α΄ Μέρους (π.χ. για την πρώτη 1 άσκηση τους Α μέρους είχαμε τις παραμέτρους Α1.1, Α1.2, Α1.3) και 4 παραμέτρους για κάθε άσκηση του Β΄ Μέρους (π.χ. Β1.1, Β1.2, Β1.3, Β1.4). Οπότε η τιμή στην οποία βρίσκεται η παράμετρος της άσκησης Β5.4 (δηλαδή το 2,11 στο Διάγραμμα 1) ερμηνεύεται ως η ικανότητα που πρέπει να έχει ένας εξεταζόμενος για να έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πετύχει αυτό το βήμα (δηλαδή να πετύχει 9 ή 10 από τις 10 μονάδες του έργου) ή αντίστοιχα την δυσκολία αυτού του έργου. Όσο πιο ψηλά στην κλίμακα βρίσκεται μια παράμετρος τόσο πιο μεγάλη η δυσκολία του συγκεκριμένου βήματος της άσκησης στην οποία αναφέρεται.

Το δοκίμιο αξιολογήθηκε μετά από στατιστική ανάλυση με δείκτες αξιοπιστίας Student Reliability = 0,98 και Item Reliability = 0,93 (Πίνακας 2). Οι δύο δείκτες δείχνουν **πολύ ψηλό βαθμό**

εσωτερικής συνοχής του δοκιμίου, ιδανικό για εξετάσεις υψίστης σημασίας όπως τις Παγκύπριες Εξετάσεις (ΠΕ).

Πίνακας 3: Δείκτες αξιοπιστίας

Item Estimates (Thresholds) 5/ 3/20 8:21
all on all (N =2137 L = 15 Probability Level= .50)

Summary of item Estimates

Mean	.00
SD	.84
SD (adjusted)	.84
Reliability of estimate	.98

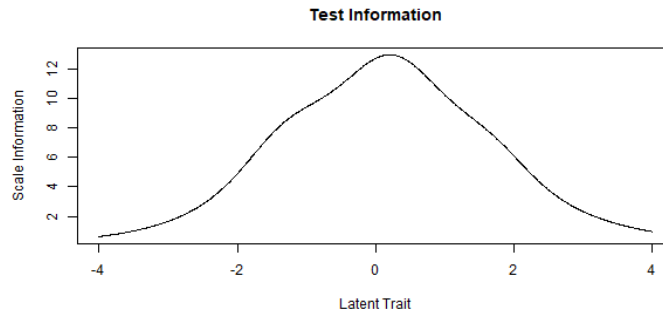
Case Estimates 5/ 3/20 8:21
all on all (N =2137 L = 15 Probability Level= .50)

Summary of case Estimates

Mean	-.35
SD	1.62
SD (adjusted)	1.56
Reliability of estimate	.93

3.1 Ανάλυση του Διαγράμματος Student-item map

Η πιο κάτω γραφική παράσταση (**Εικόνα 1**: Test Information Function) δείχνει πόση πληροφορία υπάρχει κατά μήκος της «κρυμμένη ιδιότητας» (Latent Trait) που μετρά αυτό το τεστ. Αυτή η συνάρτηση είναι αντίστροφη του τυπικού λάθους της μέτρησης οπότε στο σημείο που υπάρχει μέγιστη τιμή υπάρχει ελάχιστο τυπικό λάθος. Η γραφική παράσταση δείχνει ότι έχουμε **μια καλή εκτίμηση για τις δυσκολίες των ασκήσεων** (item difficulties) του διαγνωστικού δοκιμίου, ιδιαίτερα μεταξύ των αριθμών -2 έως και 2 (Latent Trait) που είναι το διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι περισσότερες ασκήσεις.



Εικόνα 1: Test Information Function (TIF)

Στη συνέχεια, αναλύεται το **Διάγραμμα 1** το οποίο είναι μοναδικό και αποκλειστικό των Rasch models. Δείχνει τη κατανομή των έργων τα δεξιά (με βάση τη δυσκολία της καθεμιάς) σε σχέση με την κατανομή των ικανοτήτων των εξεταζόμενων (στα αριστερά: κάθε x αντιπροσωπεύει 5 μαθητές), που στην περίπτωση αυτή φαίνεται να ακολουθούν την κανονική κατανομή (Gauss). Στο **Διάγραμμα 2** προστέθηκε για τα περισσότερα έργα η ερμηνεία της κάθε παραμέτρου (threshold) ανάλογα με το έργο στο οποίο αναφέρεται.

Από τον **Πίνακα 3** παρατηρείτε ότι, η μέση δυσκολία των ερωτήσεων (Summary of Item Estimates, Mean 0,0 logits) είναι ψηλότερη από τη μέση ικανότητα των εξεταζόμενων (Summary of Case Estimates, Mean -0,35 logits). Επίσης, οι ερωτήσεις φαίνονται να είναι καλά διασκορπισμένες και καλύπτουν ευρύ φάσμα ικανότητας των μαθητών (Διάγραμμα 1).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 1: Σχέση μαθητή-έργου (itemmap)

Partial Credit Analysis

Item Estimates (Thresholds) 5/ 3/20 8:21
 all on all (N =2137 L = 15 Probability Level= .50)

4.0	XXXXXX								
	XXXXXX								
3.0		A6	.3						
	XXXXXXXX								
	XXXXXXXX								
	XXXX	A5	.3						
		A10	.3	B5	.4				
2.0	XXXXX	A8	.3						
	XXXXXX								
	XXXXX	A9	.3	B5	.3				
	XXXXXX	B5	.2						
	XXXXXX	B4	.4						
	XXXXXXXXXXXXXXXX	B1	.4						
	XXXXXX	B3	.4						
1.0	XXXXXXXXXX	A9	.2						
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A7	.3	B2	.4				
	XXXXXXXXXX	A10	.2						
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A2	.3	A8	.2				
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A5	.2	A9	.1	B4	.3	B5	.1
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A6	.2	B1	.3	B2	.3		
.0	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A2	.2	B3	.3	B4	.2		
	XXXXXXXXXX	A4	.3	B1	.2	B2	.2		
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	B3	.2						
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A7	.2						
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX								
	XXXXXXXXXX								
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A2	.1	A5	.1	A10	.1		
-1.0	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A4	.2						
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A1	.3	A8	.1				
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A6	.1	A7	.1	B2	.1		
	XXXXXXXXXX	A1	.2	A3	.3	B1	.1		
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX	A3	.2						
	XXXXXXXXXX	A4	.1	B4	.1				
	XXXXXXXXXX	A3	.1						
-2.0	XXXXXXXXXX								
	XXXXXXXXXX	A1	.1						
		B3	.1						
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX								
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX								
-3.0	XXXXXXXXXX								
	XXXXXXXXXXXXXXXXXX								
-4.0									

Each X represents 5 students

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 2: Ανάλυση Διαγράμματος 1 (itemmap)

Partial Credit Analysis

Item Estimates (Thresholds)

5/ 3/20 8:21

all on all (N =2137 L = 15 Probability Level= .50)

4.0	XXXXXX	
	XXXXXX	
3.0	XXXXXX	A6.3:Πρόσημο παραγώγου γραφικά
	XXXXXX	
	XXXXXX	
	XXXX	A5.3:Κυρτότητα (δεδομένης της f'')
	XXXXX	A10.3 B5.4:Επίλυση προβλημάτων μεγιστοποίησης
2.0	XXXXXX	A8.3:Εκ περιστροφής
	XXXXXX	
	XXXXXX	A9.3:Δεσμευμένη 2 B5.3
	XXXXXX	B5.2
	XXXXXX	B4.4: Γραφική παράσταση πολυωνυμικής
	XXXXXXXXXXXX	B1.4
	XXXXXX	B3.4:
1.0	XXXXXXXXXX	A9.2:Δεσμευμένη 2
	XXXXXXXXXXXX	A7.3:Συνδυασμοί Πιθανότητα (το πολύ) B2.4
	XXXXXX	A10.2: Πρόβλημα Μεγιστοποίησης ($f'=0$)
	XXXXXXXXXXXX	A2.3:Ολοκλήρωση με παραμέτρους A8.2:Σχέσεις σε εκ περιστροφής
	XXXXXXXXXXXX	A5.2 A9.1:Δεσμευμένη 1 B4.3 B5.1
	XXXXXXXXXXXX	A6.2 B1.3 B2.3
.0	XXXXXXXXXXXX	A2.2:Ολοκλήρωση (κ, λ) B3.3:Πιθανότητα Laplace B4.2
	XXXXXXXXXX	A4.3:Ερμηνεία Συσχέτισης B1.2: B2.2
	XXXXXXXXXXXX	B3.2:Αναγραμματισμοί (φωνήεντα συνεχόμενα)
	XXXXXXXXXXXX	A7.2: Συνδυασμοί Πιθανότητα (ακριβώς)
	XXXXXXXXXXXX	
	XXXXXXXXXXXX	A2.1:Ολοκλήρωμα (αρχικό) A5.1:Κυρτότητα (Αλγεβρικά) A10.1:Ολοκλ.
-1.0	XXXXXXXXXXXX	A4.2: Υπολογισμός Συσχέτισης
	XXXXXXXXXXXX	A1.3: Διάταξη Συσχέτισης (Γραφικά) A8.1:
	XXXXXXXXXXXX	A6.1: Ακρότατα (Γραφικά) A7.1: Απλοί Συνδυασμοί B2.1:
	XXXXXX	A1.2: Αναγνώριση Συσχέτισης (Γραφικά) A3.3 B1.1:
	XXXXXXXXXXXX	A3.2:
	XXXXXXXXXX	A4.1: Υπολογισμός Συσχέτισης B4.1:
	XXXXXXXXXX	A3.1: Αρχή Απαρίθμησης
-2.0	XXXXXX	
	XXXXXX	A1.1: Αναγνώριση Συσχέτισης (Γραφικά)
		B3.1: Μεταθέσεις
	XXXXXXXXXXXX	
	XXXXXXXXXXXX	
-3.0	XXXXXXXXXX	
	XXXXXXXXXXXX	
-4.0		

Each X represents 5 students

**Πίνακας 4: Τα στατιστικά των 15 ερωτήσεων του δοκιμίου
(10 μέρους A και 5 μέρους B)**

```

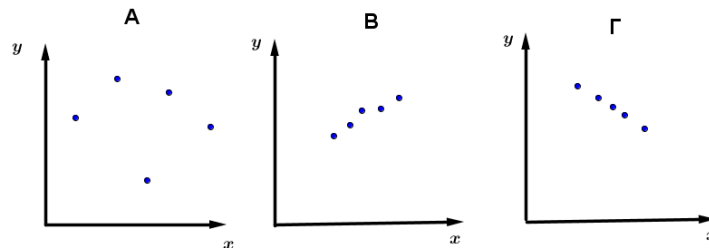
Partial Credit Analysis
-----
Item Fit                                     5/ 3/20 8:21
all on all (N =2137 L = 15 Probability Level= .50)
-----
INFIT
MNSQ      .36      .45      .63      1.00      1.60      2.20      2.80
-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----
1 A1      .          .          .          .          .          .          *
2 A2      .          .          .          .          .          .          .
3 A3      .          .          .          .          .          .          .
4 A4      .          .          .          .          .          .          .
5 A5      .          .          .          .          .          .          .
6 A6      .          .          .          .          .          .          .
7 A7      .          .          .          .          .          .          .
8 A8      .          .          .          .          .          .          .
9 A9      .          .          .          .          .          .          .
10 A10    .          .          .          .          .          .          .
11 B1      .          .          .          .          .          .          .
12 B2      .          .          .          .          .          .          .
13 B3      .          .          .          .          .          .          .
14 B4      .          .          .          .          .          .          .
15 B5      .          .          .          .          .          .          .
-----

```

Ο Πίνακας 4 δείχνει τα στατιστικά των 15 ερωτήσεων του δοκιμίου (10 μέρους A και 5 μέρους B) Ερωτήσεις που έχουν δείκτη Infit Mean Square μεγαλύτερο από 1,4 θεωρούνται ότι δεν ταιριάζουν με τις υπόλοιπες ασκήσεις γιατί έχουν μη αναμενόμενες απαντήσεις από τους εξεταζόμενους. Από την ανάλυση (Πίνακες 4 και 5) φαίνεται ότι η ερώτηση A1 (πρώτη άσκηση του A' μέρους) έχει ψηλό Infit Mean Square.

Για παράδειγμα, αυτή η άσκηση καλούσε τους μαθητές να ταξινομήσουν τρία διαγράμματα διασποράς από την πιο ισχυρή στην πιο ασθενή συσχέτιση (Εικόνα 1). Η ερώτηση αυτή αποδείχθηκε πιο δύσκολη από ότι αναμέναμε μια και είχε δείκτη δυσκολίας -1,02. Μαθητές μικρότερης ικανότητας μπόρεσαν να διακρίνουν μόνο ένα από τα γραφήματα (είτε την ασθενέστερη είτε την ισχυρότερη συσχέτιση). Η άσκηση αυτή πιθανόν να μην ταιριάζει απόλυτα στο μοντέλο μια και είναι άσκηση με ενδεχόμενο τύχης. Επιπλέον, αρκετοί μαθητές πιθανόν να θεωρήσαν ότι η αρνητική γραμμική συσχέτιση δεν μπορεί να είναι ισχυρή ή ισχυρότερη από την θετική γραμμική συσχέτιση. Υπάρχει δηλαδή παρανόηση μεταξύ της «φοράς» της συσχέτισης και του μεγέθους της. Σε πολύ χαμηλότερο βαθμό και η ερώτηση A3 του ίδιου μέρους.

A1. Δίνονται τα πιο κάτω διαγράμματα διασποράς A, B και Γ. Να ταξινομήσετε τα διαγράμματα με βάση τη γραμμική συσχέτιση από την πιο ισχυρή στη πιο ασθενή.



Εικόνα 1: Άσκηση A1 (πρώτη άσκηση του Α' μέρους)

Πίνακας 5: Τα στατιστικά των 15 ερωτήσεων του δοκιμίου (10 μέρους A και 5 μέρους B)

Partial Credit Analysis

Item Estimates (Thresholds) In input Order 5/ 3/20 8:21
all on all (N =2137 L = 15 Probability Level= .50)

ITEM NAME	SCORE	MAXSCR	THRESHOLD/S				INFT	OUTFT
			1	2	3	4		
1 A1	4365	6411	-2.13	-1.35	-1.02		2.82	6.97
2 A2	2599	6411	-.75	.05	.52		1.14	1.12
3 A3	4500	6411	-1.80	-1.51	-1.32		1.23	3.10
4 A4	3617	6411	-1.66	-.98	-.03		1.09	1.15
5 A5	2071	6411	-.78	.35	2.29		.88	.79
6 A6	2256	6411	-1.22	.15	2.85		.90	.88
7 A7	2910	6411	-1.28	-.36	.79		.94	.97
8 A8	2180	6411	-1.03	.49	1.89		.86	.85
9 A9	1430	6411	-.39	.99	1.62		1.15	1.02
10 A10	1992	6411	-.81	.67	2.10		.63	.60
11 B1	3373	8548	-1.34	-.03	.19	1.20	.95	.91
12 B2	3488	8548	-1.28	-.07	.15	.83	.78	.71
13 B3	3787	8548	-2.19	-.26	.07	1.15	.92	.94
14 B4	3359	8548	-1.66	.00	.32	1.40	.66	.61
15 B5	1464	8548	.31	1.53	1.64	2.11	.76	.65

Mean			.00		1.05	1.42
SD			.84		.52	1.65

Για παράδειγμα, από τον Πίνακα 1, παρατηρείται ότι η αναδιάταξη στο γραπτό του (2018-19), για την άσκηση A1 του Α' μέρους, αφορούσε στην ενότητα της **Στατιστικής** (συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών-γραφικά), αντί απλού αορίστου ολοκληρώματος. Αυτό έγινε γιατί παρατηρήθηκε άγνοια στην κατανόηση της έννοιας της συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών, την προηγούμενη χρονιά στο δοκίμιο (2017-18), άσκηση B1, ειδικά στην ερμηνεία και τη μετάφραση από γραφική σε λεκτική αναπαράσταση. Στη συνέχεια, στην άσκηση A4, σκοπό είχε ο θεματοθέτης, να ελέγξει την γνώση απλής εφαρμογής του τύπου της συσχέτισης, με στόχο στην άσκηση B2, τη μελέτη της εφαρμογής των τεταρτημορίων και ενδοτεταρτημοριακού εύρους, σε πραγματικό πρόβλημα. Έτσι, έγινε ανάλυση της έννοιας, «της συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών», από μια άσκηση B1 (2017-18), να εξεταστεί σε τρεις διαφορετικές ασκήσεις A1, A4 και B2 (2018-19), την επόμενη χρονιά, δίνοντας έτσι και διδακτικά μηνύματα, που αφορούσαν εννοιολογική κατανόηση και ΟΧΙ παπαγαλία γνώσης. Το ίδιο και η πρώτη άσκηση (A1), στο εξεταστικό δοκίμιο του (2017-18), ενώ αφορούσε στην ενότητα του **Αόριστου Ολοκληρώματος**, μεταφέρθηκε στη δεύτερη θέση ως άσκηση A2 κατανόησης την επόμενη σχολική χρονιά (2018-19).

Η ίδια φιλοσοφία επικράτησε και στο Β' μέρος του εξεταστικού δοκιμίου (2018-19). Για παράδειγμα, η άσκηση B1 που αφορούσε το (2017-18) σε απλή εφαρμογή της ενότητας της **Στατιστικής** (συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών) και η οποία καταμερίστηκε σε τρία επιμέρους θέματα, όπως αναλύθηκε πιο πάνω, αντικαταστάθηκε το (2018-19), με την άσκηση **Στερεομετρίας**, η οποία το (2017-18) ήταν στη θέση B5 ως εφαρμογή. Το (2018-19) μεταφέρθηκε στη θέση B1 ως κατανόηση, εφόσον η σχέση μαθητή-έργου (Διάγραμμα 1) (item map) δηλώνει συσχέτιση σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές, καθώς επίσης και από τον δείκτη δυσκολίας του τελευταίου βήματος της άσκησης B1, το B1.4 που είναι 1.2, είναι δηλαδή πολύ κοντά στο μέσο όρο δυσκολίας όλων των ασκήσεων (Πίνακας 4, Summary of Item Estimates 0.0)).

Το (2018-19), στην θέση της B5, αντί της στερεομετρίας εξετάστηκε άσκηση εφαρμογής **διαφορικού λογισμού** από **γεωμετρικό πρόβλημα** αντί αυτού με **κερδοζημιά**, της προηγούμενης σχολικής χρονιάς 2018-19 (στη θέση B3). Από τα αποτελέσματα (Διάγραμμα 1) παρατηρήθηκε ότι η μεταφορά της άσκησης στη θέση B5 με **γεωμετρικό πρόβλημα** ήταν ορθή, διότι οι μαθητές **δεν** ήταν δυστυχώς εξοικειωμένοι με τη **Γεωμετρία** και τους δυσκόλεψε τόσο στην κατασκευή της συνάρτησης [10] όσο και στην επίλυση του προβλήματος. Το τέταρτο βήμα της πέμπτης άσκησης (B5.4) έχει δυσκολία 2,11 (Πίνακας 5) πράγμα που επιβεβαιώνει την δυσκολία της.

Το συγκεκριμένο μάθημα δεν είναι εξεταζόμενο μάθημα απόλυσης στη Γ' τάξη Λυκείου (2017-18) ή πρόσβασης από την Βκκ στη Γκκ, από το (2016-17). Ο μέσος όρος βαθμολογιών του γραπτού ήταν (7,89) με τυπική απόκλιση (6,04), αριθμού υποψηφίων 2137. Αναφερόμενη στους μέσους όρους των ΠΕ η ακαδημαϊκός Κουτσελίνη υπεύθυνη των ΝΑΠ, υποστήριξε:

Οι μέσοι όροι είναι πλαστά κατασκευάσματα, τα οποία αποκρύπτουν την πραγματικότητα των ενοποιημένων εξετάσεων και την οποία έχουν ζήσει οι διορθωτές και όσοι εργάστηκαν στα σχολεία. Και αυτό διότι ο μέσος όρος μας λέει ότι ένα γραπτό του 19 και ένα γραπτό του 1-3 μας δίνουν έναν ανύπαρκτο βαθμό 10-11 που εκφράζεται με τον μέσο όρο, ο οποίος μάλιστα στις ανακοινώσεις δεν λαμβάνει υπόψη ούτε την απόκλιση στις βαθμολογίες που προστίθενται. Τότε, με βάση αυτόν τον ανύπαρκτο βαθμό, αρχίζει το παραλήρημα: «πατώσαμε», «αποτύχαμε», «φταίει η αναποτελεσματική διδασκαλία (Κουτσελίνη, Paideianews, 27/6/2018).

Το εξεταστικό δοκίμιο Μαθηματικών Παγκυπρίων Εξετάσεων 2017-18 της Γκκ [7], για **πρώτη φορά**, αφορούσε μόνο στους μαθητές για πρόσβαση στα ΑΑΕΙ, από τα Μαθηματικά του κοινού κορμού της Γκκ (3ΔΠ την εβδομάδα) αλλά, είχαν δικαίωμα να παρακαθίσουν και οι μαθητές της Γ' κατεύθυνσης Μαθηματικών (7ΔΠ την εβδομάδα).

4 Παρουσίαση και Ερμηνεία αποτελεσμάτων και Λάθη μαθητών

Τα πιο σημαντικά λάθη των μαθητών στις (ΠΕ) Μαθηματικών Γκκ (2018-19), ήταν κυρίως λάθη που αφορούσαν **μη** κατανόηση εννοιών (conceptual understanding), περισσότερο παρά λάθη που αφορούσαν απροσεξίες όπως πράξεις και χρήση ή μεταφορά λάθους από ελλιπή στοιχεία. Για παράδειγμα, αρκετοί μαθητές δεν συμπλήρωναν τη σταθερά του ολοκληρώματος (έργο Α2) το οποίο οφειλόταν σε αφελές λάθος. Αν αυτό επαναλαμβανόταν, στην περίπτωση του **έργου Α10**, τότε οφειλόταν σε σοβαρή παρανόηση την έννοιας του ολοκληρωτικού λογισμού. Συγκεκριμένα υπήρχαν **τρία είδη** παρανοήσεων που αφορούσαν μετάφραση:

- A. Μετάφραση από Λεκτική σε Συμβολική (παράδειγμα τα έργα Α10, Β2, Β3, Β5)
- B. Μετάφραση από Συμβολική ή/και Διάγραμμα σε Λεκτική (έργα Α1, Α6).
- Γ. Αιτιολόγηση βασικών γεωμετρικών εννοιών (έργο Β5)

4.1 Ερμηνεία λαθών των εξεταζόμενων μαθητών

Η περίπτωση της μετάφρασης από λεκτική σε συμβολική μορφή παρουσιάστηκε στα έργα **Α10, Β2, Β3, Β5**.

Το έργο **Α10** αφορούσε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα της φαρμακευτικής:

Α10. Η ποσότητα ενός φαρμάκου (σε mg), στον οργανισμό του ανθρώπου, δίνεται από τη συνάρτηση $\Pi(t)$, όπου t είναι ο χρόνος μετά τη λήψη του φαρμάκου (σε ώρες).

Δίνεται ότι $\Pi'(t) = 12 - 6t, t \geq 0$. Μια ώρα μετά από τη λήψη του φαρμάκου υπάρχουν 9 mg φαρμάκου στον οργανισμό του ανθρώπου.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Π δίνεται από τον τύπο $\Pi(t) = 12t - 3t^2, t \geq 0$.

β) Να βρείτε:

- i) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του φαρμάκου υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου η μέγιστη δόση του φαρμάκου,
- ii) τη μέγιστη δόση του φαρμάκου (σε mg), που υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου,
- iii) σε πόσες ώρες μετά τη λήψη του, το φάρμακο αυτό ΔΕΝ θα υπάρχει στον οργανισμό του ανθρώπου.

Όπως βλέπουμε από το **Διάγραμμα 2** το πρώτο βήμα της άσκησης (A10.1) είναι σχετικά εύκολο μια και αρκετοί μαθητές (ακόμα και αν δεν αντιληφθούν την λεκτική διατύπωση του προβλήματος) γνωρίζουν ότι ολοκληρώνοντας το $\Pi'(t)$ θα καταλήξουν στο ζητούμενο $\Pi(t)$. Η έκφραση «μέγιστη δόση φαρμάκου» παραπέμπει επίσης, πολλούς μαθητές στο να μηδενίσουν την πρώτη παράγωγο (που δίνεται) και να υπολογίσουν τον χρόνο. Το τελευταίο ερώτημα όμως αποδείχτηκε αρκετά δύσκολο για τους μαθητές (A10.3) μια και απαιτεί μετάφραση από Λεκτική σε Συμβολική μορφή σε συνδυασμό με κριτική σκέψη.

Το πρώτο μέρος του έργου B2 αφορούσε ένα πρόβλημα εύρεσης των παραμέτρων α, β ώστε η συνάρτηση να έχει συγκεκριμένο σημείο καμπής και συγκεκριμένο ακρότατο:

B2. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 6x^3 - ax^2 + bx + 1, x \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β , ώστε η f να έχει στη θέση $x_1 = 2$ σημείο καμπής και στη θέση $x_2 = 1$ τοπικό ακρότατο.

Μεταφράζοντας από **λεκτικό σε συμβολικό** οι μαθητές δεν αντιλήφθηκαν ότι θα έπρεπε (λόγω της λέξης «ώστε») να ελέγξουν και το αντίστροφο. Να βρουν δηλαδή τις τιμές των α και β και μετά να επαληθεύσουν την απάντησή τους. Το αντίστροφο δεν ελέγχθηκε από κανένα μαθητή. Η άσκηση όμως δεν αποδείχθηκε ιδιαίτερα δύσκολη μια και δεν αποκόπηκαν μονάδες για αυτή την παράληψη, μια και το γραπτό αφορούσε μαθητές Κοινού Κορμού.

Το έργο **B3** αφορούσε άσκηση Συνδυαστικής και Πιθανοτήτων.

B3. Δίνεται η λέξη **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**

α) i) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

ii) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης, που έχουν τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

β) Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς της λέξης **ΔΙΑΜΑΝΤΙΑ**, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

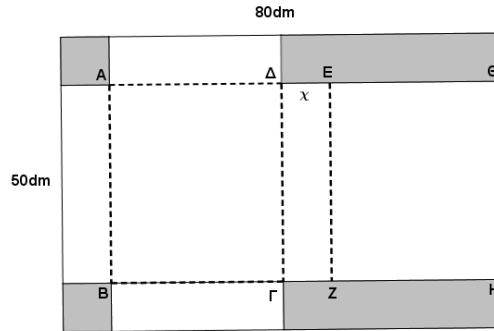
i) A: Ο αναγραμματισμός να έχει τα φωνήεντα σε συνεχόμενες θέσεις.

ii) B: Ο αναγραμματισμός να μην έχει τα A σε συνεχόμενες θέσεις.

Το πρόβλημα προέκυψε στο β μέρος της άσκησης στο ερώτημα ii) όπου μερικοί μαθητές της Κατεύθυνσης έλυσαν την άσκηση διαφορετικά από τους μαθητές του Κοινού Κορμού. Θεώρησαν δηλαδή ότι τα A (ούτε τα 3 μαζί ούτε και τα 2 μαζί) δεν θα έπρεπε να ήταν σε συνεχόμενες θέσεις. Δηλαδή η λέξη να μην περιέχει «AAA», αλλά ούτε και «AA». Αυτή η δυσκολότερη λύση της άσκησης έγινε φυσικά δεκτή από τους διορθωτές [11].

Το έργο **B5** αφορούσε γεωμετρικό πρόβλημα μεγιστοποίησης όγκου:

B5 Δίνεται ένα χαρτόνι σχήματος ορθογωνίου διαστάσεων $80dm \times 50dm$. Πρόκειται να κατασκευαστεί με αυτό ένα κλειστό κουτί, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ύψους $\Delta E = x dm$ με βάσεις τα ορθογώνια $EZH\Theta$ και $AB\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σκιασμένα μέρη του σχήματος θα αφαιρεθούν. (Οι διπλώσεις θα γίνουν κατά μήκος των τμημάτων $AB, \Gamma\Delta, EZ, A\Delta$ και $B\Gamma$).



- α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο

$$V(x) = (2x^3 - 130x^2 + 2000x) \text{ dm}^3$$
- β) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του κουτιού, ώστε ο όγκος του να είναι μέγιστος.

Οι μαθητές του Κοινού Κορμού δυσκολευτήκαν να μεταφράσουν από τη **Λεκτική σε Συμβολική** μορφή. Υπήρχε και αυτή τη χρονιά αδυναμία στην κατασκευή της συνάρτησης (στο ερώτημα α), κάτι που πρέπει να μας προβληματίσει στη διδασκαλία, ώστε να «κτίζονται» οι τύποι και να μη δίνονται έτοιμοι, όπου είναι δυνατόν. Επίσης, οι μαθητές θεώρησαν δεδομένο ότι το σημείο Δ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος μήκους 80dm χωρίς να το αιτιολογήσουν.

5 Συμπεράσματα

Βασικό συμπέρασμα από την ανάλυση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων είναι η αμφισβήτηση του μέσου όρου των εξεταστικών δοκιμίων, ως δείκτης επιτυχίας ή αποτυχίας της εξέτασης, σε αντίθεση με την τεράστια σημασία του **Πίνακα Προδιαγραφών (ΠΠ)**, ενός Εξεταστικού δοκιμίου, ο οποίος κάθε χρόνο μπορεί να προσαρμόζεται πριν την κατασκευή του δοκιμίου, λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση των αποτελεσμάτων της **προηγούμενης χρονιάς**. Όσον αφορά την ερμηνεία των λαθών, σημαντικό είναι στη διδακτική πράξη να προσεχτούν λάθη, όπως οι έννοιες να «κτίζονται»[8] (Kotsopoulos, 2007), από τους μαθητές, κατανοώντας την έννοια (conceptual understanding), όχι ως απλή διαδικασία μάθησης (procedural understanding) που προάγει την απομνημόνευση, δίνοντας λύσεις έτοιμες στο πιάτο. Η διαδικασία αυτή, της κατανόησης των εννοιών, πρέπει να περάσει από τους καθηγητές στους μαθητές, «διότι οι καλύτεροι εκπαιδευτικοί είναι αυτοί που πάντα προσπαθούν να βελτιώνουν τις πρακτικές τους»[9] (Van De Walle, Karp & Bay-William, 2007, p.10), κατά την ώρα της διδασκαλίας-μάθησης, καθώς οι λάθος αντιλήψεις δεν φεύγουν εύκολα, ούτε αναγεννούν νέες ιδέες, όπως αναφέρεται στη μυθολογία ότι ο Ήφαιστος με ένα μεγάλο σφυρί χτύπησε το κεφάλι του Δία και αμέσως πετάχτηκε η Αθηνά πάνοπλη, φορώντας περικεφαλαία και κρατώντας μια ασπίδα!

Ευχαριστώ την συνάδελφο Δρα Κωνσταντία Χατζηδημητρίου για την συμβολή της στην στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων.

Αναφορές:

[1]:Επιλογή Μαθημάτων στο Ενιαίο Λύκειο, ΥΠΠ υπηρεσία ΣΕΑ (2011), file:///C:/Users/User/Desktop/100_XPONA%20EME/epilogi_mathimatou_eniaio_lykeio.pdf

- [2]:Οδηγός Υποδοχής στη Κυπριακή Εκπαίδευση (http://www.moec.gov.cy/odigos-ekpaidefsis/documents/greek_odigos_ipodoxis.pdf)
- [3]:[file:///C:/Users/User/Desktop/100_XPONA%20EME/prosanatolismoi meta to gimnasio.pdf](file:///C:/Users/User/Desktop/100_XPONA%20EME/prosanatolismoi_meta_to_gimnasio.pdf)
- [4]:http://www.moec.gov.cy/analytika_programmata/anadomisi_ap_politiki_deikton_eparkeias.html#anadomisi
- [5]:ΤΕΛΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗΣ ΑΝΑΔΟΜΗΔΗΣ/ΑΝΑΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΤΟΥ ΩΡΟΛΟΓΙΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ προς ΤΟΝ ΥΠΠ Κ. ΚΩΣΤΑ ΚΑΔΗ (20 ΜΑΡΤΙΟΥ 2015), ανάρτηση στην ιστοσελίδα:
http://www.moec.gov.cy/archeia/2014_nees_protaseis_paideia/2015_03_23_protasi_anadomisis_anadiamorfosis_orologio.pdf, 10/8/2018)
- [6]:ΕΕΜ,<http://www.refernet.org.cy/images/media/assetfile/EkpedeftikiMetarithmisi.GR%5B2%5D.pdf>
- [7]: Δοκίμιο Γκκ, 17-18, http://archeia.moec.gov.cy/mc/46/2018_05_21_043_lyseis.pdf
- [8]: Kotsopoulos, D. (2007). Mathematics discourse. It's like learning a foreign language. *Mathematics Teacher*, 101(4),301-305.
- [9]:Van De Walle, J.A.,Karp&Bay-William. (2007). *Elementary and Middle school mathematics: Teaching developmentally*.Boston: Pearson/Allyn and Bacon.
- [10]: Χατζηχρίστου, Χ. (2019). 36^ο Πανελλήνιο Μαθηματικό Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας: Παγκύριες Εξετάσεις (ΠΕ) Μαθηματικών: Ανάλυσης αποτελεσμάτων Γ' τάξης Κοινού Κορμού (2017-18).
- [11]: Δοκίμιο/Λύσεις Γκκ 18-19 http://archeia.moec.gov.cy/mc/164/2019_06_10_043_lyseis.pdf